



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

the 1990s, the number of people in the world who are undernourished has increased from 600 million to 800 million. The number of people who are malnourished has increased from 1.2 billion to 1.5 billion. The number of people who are obese has increased from 100 million to 300 million. The number of people who are overweight has increased from 200 million to 500 million.

The World Health Organization (WHO) estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

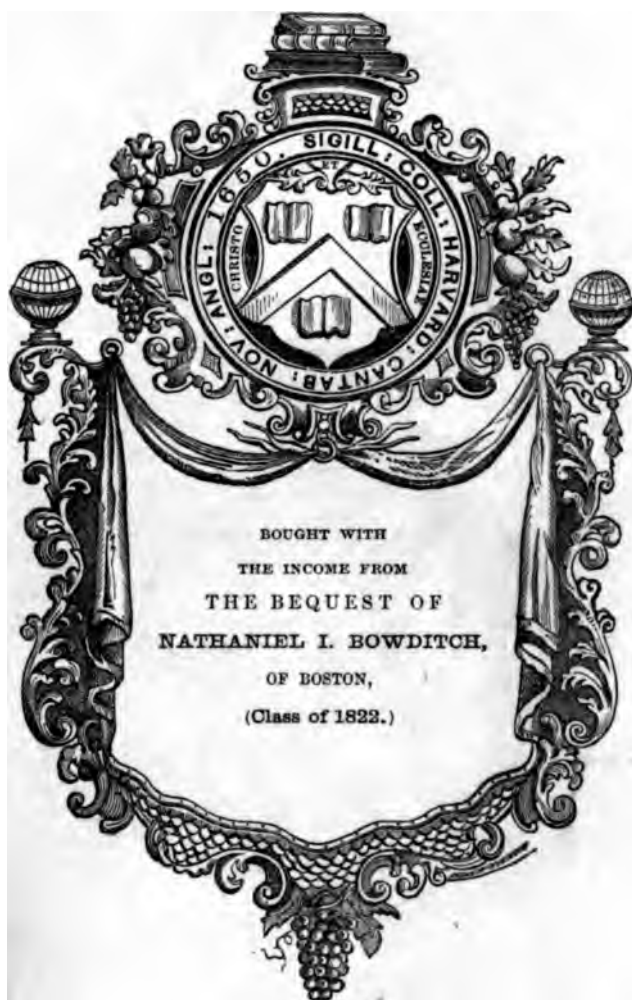
The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

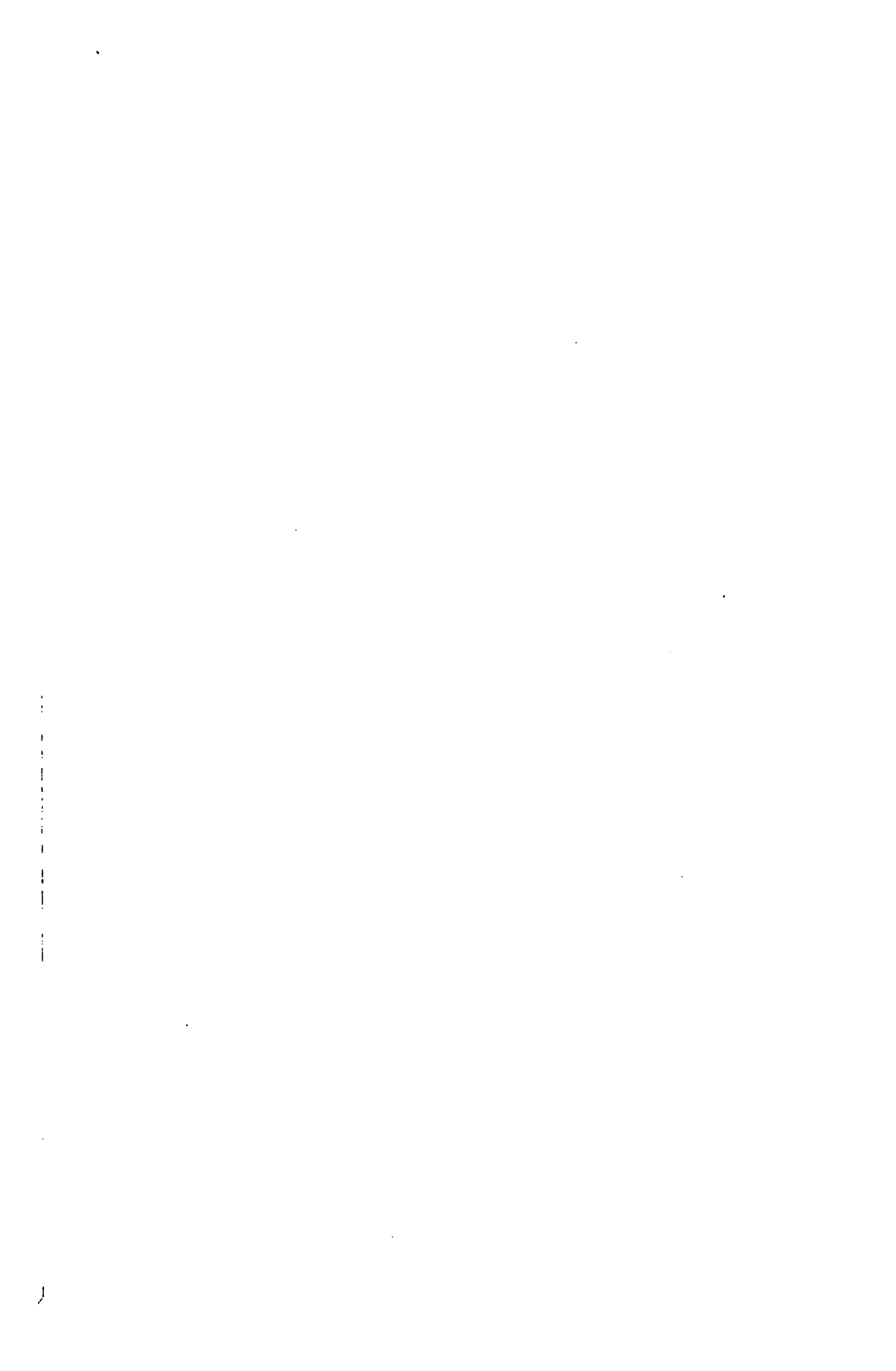
The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are undernourished. The WHO also estimates that 1.5 billion people are overweight or obese, and 1.1 billion are malnourished.

Math 5858.95.3

B





Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1894. 1895.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. In 6 Theilen. II. Theil: Die analytische Zahlentheorie. [XVIII u. 494 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 12.—

Gardner, Dr. E., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. 21. Auflage. [XIV u. 330 S.] gr. 8. 1895. In dauerhaftem Einband *M* 3.20.

arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. Neunte Auflage. [XI und 269 S.] gr. 8. 1895. In dauerhaftem Einbande n. *M* 2.40.

zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. Ausg. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 3.—

Biermann, Dr. Otto, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Brunn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 10.—

Böcher, Maxime, Dozent an der Harvard-Universität zu Cambridge, Mass., V. St. A., über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von Felix Klein. [VIII u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 8.—

Breuer, Peter Joseph, Direktor des Progymnasiums zu Wipperfurth, die gemeinen Logarithmen. Zweite Auflage. [31 S.] qu. gr. 8. 1894. geh. n. *M* —.60.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. 2., verb. Auflage. [VII u. 883 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 22.—

III. Band. Von 1668 bis 1759. In 3 Abtheilungen. I. Abt. Die Zeit von 1668 bis 1699. Mit 45 Figuren im Text. [261 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 6.— (III, 2 folgt im Sept. 1895.)

Eberhard, Dr. V., Professor an d. Universität zu Königsberg i. P., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 5 Figurentafeln. [XLVIII u. 302 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 14.—

über die Grundlagen und Ziele der Raumlehre. Separatabdruck aus der Vorrede zu „die Grundgebilde der Geometrie“. [29 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 1.60.

Fiorini, Matteo, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von SIEGMUND GÜNTHER. Mit 9 Textfiguren. [V und 137 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 4.—

Föppl, Dr. A., Professor an der Universität Leipzig, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Mit Figuren im Text. [XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 10.—

Ganter, Dr. H., Professor an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Übungsbeispielen versehen. 2., verb. Aufl. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 2.40.

o

DIE THEORIE
DER
PARALLELLINIEN

VON EUKLID BIS AUF GAUSS,

EINE URKUNDENSAMMLUNG

ZUR VORGESCHICHTE DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE,

IN GEMEINSCHAFT

MIT

FRIEDRICH ENGEL

HERAUSGEGEBEN

VON

PAUL STÄCKEL.

**MIT 145 FIGUREN IM TEXT UND DER NACHBILDUNG
EINES BRIEFES VON GAUSS.**



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

Math 5858.95.3

" B



*Substituted for a copy lost
(Bausch fund)*

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Fast dreißig Jahre sind vergangen, seitdem durch die Veröffentlichung von Riemanns Probevorlesung und durch das Erscheinen von Helmholtz' Abhandlung, *Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen* das Raumproblem und damit auch die Parallelenfrage Gegenstand eines allgemeinen und nachhaltigen Interesses geworden ist. Ungefähr um dieselbe Zeit wurde bekannt, daß Gauß schon sehr früh die Möglichkeit und die Berechtigung einer Geometrie erkannt hatte, die vom Parallelenaxiome unabhängig ist, und es wurden die Schriften von Lobatschefskij und Bolyai, in denen diese Geometrie ihre systematische Entwicklung gefunden hatte, der Vergessenheit entrissen.

Gauß, Lobatschefskij und Bolyai galten nunmehr als die Schöpfer der nichteuklidischen Geometrie, deren weitere Ausbildung und tiefere Begründung von Riemann und Helmholtz angebahnt worden war.

Es mußte daher ein gewisses Aufsehen erregen, als im Jahre 1889 Herr Beltrami darauf hinwies, daß bereits 1733 ein italienischer Jesuit, Girolamo Saccheri, bei dem Versuche, die fünfte Forderung Euklids zu beweisen, zu einer Reihe von Sätzen gelangt war, die man bis dahin Lobatschefskij und Bolyai zugeschrieben hatte. Indes, so merkwürdig diese Entdeckung auch war, eine so vereinzelte Erscheinung konnte doch nur den Wert einer Kuriosität haben. Allerdings kam mir schon damals der Gedanke, ob nicht vielleicht Saccheris *Euclides ab omni naevo vindicatus* als ein Glied in der Kette einer geschichtlichen Entwicklung anzusehen sei, sodaß also das Grundgesetz der Stetigkeit auch bei der Entstehung der nichteuklidischen Geometrie seine Geltung behalten habe. Aber erst einige Jahre später zeigte mir ein glücklicher Zufall, daß meine Vermutung gerechtfertigt gewesen war.

Untersuchungen über die ältere Geschichte der Flächentheorie waren die Veranlassung, daß ich im Januar 1893 eine der ältesten

mathematischen Zeitschriften in die Hand nahm, das wenig bekannte *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, das J. Bernoulli und C. F. Hindenburg von 1786 bis 1789 herausgegeben haben. In dem ersten Jahrgange erregte eine *Theorie der Parallellinien* von Johann Heinrich Lambert meine Aufmerksamkeit, und die genauere Prüfung führte zu dem überraschenden Ergebnis, daß Lambert als ein bisher übersehener Vorgänger von Gaußs, Lobatschefskij und Bolyai anzusehen sei.

Hierdurch ermutigt, begann ich die Entwicklung der Parallelen-theorie genauer zu studieren, und da auch meine weiteren Nachforschungen von Erfolg begleitet waren, konnte ich im Januar 1894 den Plan fassen, von den älteren Arbeiten über die Parallelentheorie die wichtigsten, die von Euklid, Wallis, Saccheri, Lambert und Gauß neu herauszugeben und diese *Urkunden* durch einen verbindenden Text zu einer *Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie* zu vereinigen. Während der Drucklegung des Buches kam eine wesentliche Ergänzung hinzu: es gelang mir, Genaueres über die Untersuchungen von Schweikart zu ermitteln, und dabei stellte sich heraus, daß ein Neffe Schweikarts, ein gewisser Taurinus, schon 1826, demnach früher als Lobatschefskij und Bolyai, eine *nichteuklidische Trigonometrie* durch den Druck veröffentlicht hatte.

Von der Entdeckung der Lambertschen Abhandlung hatte ich bereits im Februar 1893 meinem Freunde Friedrich Engel in Leipzig Mitteilung gemacht, der ihre Wichtigkeit sogleich zu würdigen wufste, und durch seine Vermittelung war Lambert in der Vorrede zu dem dritten Bande von Lie's *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig 1893, S. X—XI) erwähnt worden. Jetzt gelang es mir, Engel zum Mitarbeiter bei der Durchführung meines Planes zu gewinnen. In gemeinsamer Arbeit sind so die Übersetzungen aus Euklid, Wallis, Saccheri und Taurinus entstanden, die hier mitgeteilt werden. Dagegen übernahm ich die Beschaffung und Sichtung des geschichtlichen Materials sowie die Zusammenstellung des Litteraturverzeichnisses. Ebenso bearbeitete ich zu den einzelnen Abschnitten die Einleitungen, deren endgültige Fassung dann von uns beiden in regem mündlichen und schriftlichen Gedankenaustausche festgestellt wurde.

Das Vorhergehende dürfte schon deutlich zeigen, was, vom mathematisch-historischen Standpunkte aus betrachtet, dieses Buch bezweckt. Es soll nicht eine Geschichte der Parallelentheorie sein; an ein so weitschichtiges Unternehmen, bei dem allein die Sammlung

und Durcharbeitung der Litteratur viele Jahre kosten würde, haben wir uns nicht gewagt. Nur einen Beitrag dazu wollen Engel und ich geben, indem wir die älteren Untersuchungen über die Parallelen theorie darauf hin betrachten, in wie weit sie für die nicht-euklidische Geometrie von Bedeutung sind. Wir sind uns freilich wohl bewußt, daß auch unter dieser Beschränkung von uns nichts Abgeschlossenes gegeben wird. Haben meine systematisch betriebenen Nachforschungen, denen eine Reihe glücklicher Zufälle zu Hilfe kam, ein unerwartet günstiges Ergebnis gehabt, so bleibt doch in der Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie vieles in Dunkel gehüllt; insbesondere ist der Abschnitt über Carl Friedrich Gauß, nicht durch unsre Schuld, recht dürftig ausgefallen.

Für nicht weniger wesentlich halten wir einen zweiten Gesichtspunkt, von dem aus wir unser Buch betrachtet zu sehen wünschen.

Wenn immer mehr anerkannt wird, in wie hohem Maße gerade bei den feinsten Untersuchungen der neueren Mathematik das tiefere Verständnis durch die geschichtliche Betrachtungsweise gefördert wird, so trifft das ganz besonders bei der nichteuklidischen Geometrie zu. Wir sind überzeugt, daß das Eindringen in diese beim ersten Anblick so paradoxen, dem gesunden Menschenverstande scheinbar so widerstrebenden Gedankenbildungen durch nichts mehr erleichtert wird, als wenn man ihrer geschichtlichen Entwicklung nachgeht, wenn man verfolgt, wie die Emancipation von Euklid durch jahrhundertelange Arbeit vorbereitet wird, und wie sich dann die neuen Ideen mit unwiderstehlicher Gewalt fast gleichzeitig an räumlich weit entfernten Orten Europas Bahn brechen.

In engem Zusammenhange hiermit steht ein weiterer Zweck, dem unser Buch dienen soll.

Wer sich über das Wesen der nichteuklidischen Geometrie Klarheit verschaffen wollte, befand sich bisher in einer recht schwierigen Lage: fast alle Arbeiten über diesen Gegenstand setzen erhebliche Vorkenntnisse auf den verschiedensten Gebieten der neueren Mathematik voraus, und da, wo die Anforderungen in dieser Beziehung geringer sind, wie bei Lobatschewskij und bei Bolyai, erschwert die Art der Darstellung das Verständnis.

Unter diesen Umständen dürfte unser Buch namentlich denen willkommen sein, die in den Gedankenkreis der nichteuklidischen Geometrie einzudringen gewillt sind, denn die Abhandlungen von Wallis, Saccheri und Lambert sind einem jeden verständlich, der über die elementarsten Vorkenntnisse verfügt, und, was die Darstellung betrifft, so zeichnet sich Saccheris *Euclides ab omni naevo vindicatus* durch

eine wahrhaft klassische Vollendung aus, während bei Lamberts *Theorie der Parallellinien*, einem tief eindringenden Versuche dieses scharfsinnigen Denkers sich über die Parallelenfrage Rechenschaft zu geben, die Frische und Natürlichkeit der Ausdrucksweise an Leonhard Euler erinnert. Größere Anforderungen an den Leser stellt Taurinus; hier ist zum vollen Verständnis die Bekanntschaft mit den Elementen der höheren Analysis erforderlich.

Haben wir uns bis jetzt an die *Mathematiker* gewendet, so möchten wir doch auch die *Philosophen* auf unser Buch aufmerksam machen, denn die Parallelentheorie steht mit verschiedenen philosophischen Grundproblemen in enger Verbindung, *streift doch*, wie Gaußs sich ausdrückt, *der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik*. Freilich haben wir darauf verzichtet, in diesem Buche, das zunächst für mathematische Leser bestimmt ist, auf den oft recht nahe liegenden Zusammenhang der Untersuchungen über Parallelentheorie mit den philosophischen Fragen ihrer Zeit einzugehen. Immerhin glauben wir, daß unser Buch dem Philosophen mancherlei Anregung zu weiteren Untersuchungen bietet, und möchten in dieser Hinsicht etwa auf die Beziehungen zu dem Probleme des Unendlichen hinweisen, sowie den unverkennbaren Einfluß der Kantischen Philosophie (Kritik der reinen Vernunft 1781) auf das Wiedererwachen des Interesses für die Grundlagen der Geometrie und damit auch für die Parallelentheorie betonen.

Schließlich müssen wir der Unterstützung gedenken, die uns bei unsrer Arbeit von verschiedenen Seiten zu teil wurde. Es ist uns nicht möglich, an dieser Stelle allen denen namentlich zu danken, die uns durch freundliche Auskunft auf unsre Anfragen, durch wertvolle geschichtliche Mitteilungen, durch Überlassung von uns sonst unzugänglichen Büchern verpflichtet haben, und wir müssen uns darauf beschränken, hier folgende Herren zu nennen.

Dem Direktor der Biblioteca Estense in Modena, Herrn A. Forti, verdanken wir eine Abschrift von Aufzeichnungen, die ein Freund und Ordensbruder Saccheris über dessen Leben und Werke gemacht hat; durch diese Aufzeichnungen werden die spärlichen gedruckten Nachrichten über Saccheri, die wir ermitteln konnten, wesentlich ergänzt. Herr Pastor A. Fürer in Merseburg, ein Stiefbruder des Taurinus, hat uns zwei Briefe von Schweikart an Taurinus, sowie einen Brief von Gaußs an Taurinus zur Veröffentlichung überlassen. Er hat uns auch auf die *Elementa* des Taurinus aufmerksam gemacht, die bis dahin ganz unbekannt geblieben waren. Herr Bau-

meister Fr. Schmidt in Budapest stellte uns wichtige Mittheilungen über die beiden Bolyai, sowie über Schweikart zur Verfügung, Herr Prof. A. Wassiljef in Kasan solche über Lobatschefskij. Endlich hat Herr Dr. Wiegner in Leipzig aus reinem Interesse für die Sache sich der großen Mühe unterzogen, für den Neudruck eine genaue Abschrift von Lamberts Abhandlung anzufertigen.

An der Drucklegung des Werkes haben Engel und ich in gleichem Mafse mitgewirkt. Wir liefsen uns dabei von den Grundsätzen leiten, die Engel bei der Herausgabe von H. Graßmanns *Gesammelten mathematischen und physikalischen Werken* befolgt. Man findet also bei den Abhandlungen, die wir mittheilen, die Seitenzahlen der ursprünglichen Ausgaben am Rande angegeben. Ebenso sind unsre Zusätze im Text durch Einschließen in eckige Klammern kenntlich gemacht worden. Die ursprünglichen Lesarten von Stellen, an denen eine Änderung des Textes notwendig erschien, findet man jedes Mal am Schlusse der betreffenden Abhandlung zusammengestellt. Im Hinzufügen erläuternder Anmerkungen sind wir sparsam gewesen. Es wäre freilich leicht gewesen, an vielen Stellen auf Grund der Einsichten, die man den neueren Untersuchungen über die nichteuclidische Geometrie verdankt, Kritik zu üben; uns schien jedoch, dafs solche Bemerkungen, wenn sie nicht sehr ausführlich sind, den Anfänger nur verwirren können, während sie für den Kenner überflüssig sind. Dagegen haben wir uns nach Kräften bemüht, dem Leser das Zurechtfinden in dem Buche zu erleichtern, und hoffen, dafs die ausführlichen Angaben an den Köpfen der Seiten sowie das Autorenverzeichnis am Ende des Buches als zweckmäfsig anerkannt werden.

Herrn Dr. A. Gutzmer in Berlin sind wir für seine freundliche Beihilfe bei der Korrektur zu Dank verpflichtet.

Wir können nicht schliessen, ohne der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner unsern Dank dafür auszusprechen, dafs sie alle unsre Wünsche in Betreff der Ausstattung des Buches aufs bereitwilligste erfüllt hat. Besonderen Wert legen wir darauf, dafs wir die zahlreichen Figuren in den Text aufnehmen konnten, obwohl es notwendig wurde, einzelne Figuren drei, ja vier Mal zu wiederholen; ebenso freuen wir uns, dafs wir dem Buche einen bisher unbekannten Brief von Gauß in getreuer Nachbildung beigeben können.

Halle a. S., im Juni 1895.

Paul Stäckel.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	III—VII
Euklid, um 300 v. Chr.	1— 14
Einleitung und Litteratur	3— 5
Euklids Elemente, erstes Buch, Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, Satz 1—32	6— 14
John Wallis, 1616—1703	15— 30
Einleitung und Litteratur	17— 20
Euklid bei den Arabern	17
Ältere Euklidausgaben	17— 18
Die Parallelen­theorie in Frankreich (Ramus, Desargues)	18
Die Parallelen­theorie in England (Savile; Wallis)	18— 19
Der Beweisversuch von Wallis	19
Litteratur	19— 20
Beweis der fünften Forderung Euklids, öffentlich vor- getragen in Oxford am Abend des 11. Juli 1663	21— 30
Girolamo Saccheri, 1667—1733	31—136
Einleitung und Litteratur	33— 40
Die Parallelen­theorie in Italien (Borelli, Giordano da Bitonto; Saccheri)	33— 34
Saccheris Leben	34— 35
Seine mathematischen Schriften	35— 36
Saccheris Euclides ab omni naevo vindicatus	36— 39
Litteratur	40
Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geo- metricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geo- metriae Principia. Liber I.	41—135
Vorwort an den Leser	45— 47
Inhaltsverzeichnis	48— 49
Erstes Buch, erster Teil, Lehrsatz I—XXXIII	50—122
Des ersten Buches zweiter Teil, Lehrsatz XXXIV—XXXIX . .	123—135
Abweichungen vom Urtext	136
Johann Heinrich Lambert, 1728—1777	137—208
Einleitung und Litteratur	139—151

Inhaltsverzeichnis.

IX

	Seite
Die Parallelentheorie in Deutschland (Kaestner, Klügel; Lambert)	139—141
Die Parallelentheorie von Lambert	141—148
Lamberts Nachlaß	148—150
Litteratur	151
Theorie der Parallellinien	152—207
1) Vorläufige Betrachtungen. §. 1—11	152—162
2) Vortrag einiger Sätze, die für sich betrachtet werden können. §. 12—26	163—176
3) Theorie der Parallel-Linien. §. 27—88	176—207
Allgemeines §. 27—39	176—180
Erste Hypothese §. 40—51	180—185
Zweite Hypothese §. 52—64	186—192
Dritte Hypothese §. 65—88	192—207
Abweichungen vom Original	208
Carl Friedrich Gauß, 1777—1855	209—236
Einleitung und Litteratur	211—218
Die Parallelentheorie in Frankreich (d'Alembert, Fourier, Lagrange, Laplace, Legendre)	211—213
Die Parallelentheorie in Deutschland (Seyffer, Voit; Gauß) . .	213—215
Die bisher bekannten Äußerungen von Gauß	215—217
Litteratur	218
I. Brief von Gauß an W. Bolyai, Ende 1799	219
II. Eine Besprechung aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816	220—223
III. Eine Besprechung aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 28. October 1822	223—226
IV. Aus Briefen von Gauß und Bessel, 1829 und 1830	226—227
V. Aus Briefen von Gauß und Schumacher, 1831 und 1846 . .	227—235
Abweichungen von den Originalabdrücken	236
Ferdinand Karl Schweikart, 1780—1857 und Franz Adolph Tau- rinus, 1794—1874	237—286
Einleitung und Litteratur	239—254
Allgemeines	239—240
N. Lobatschewskij	240—241
W. und J. Bolyai	241—243
F. K. Schweikart	243—246
Gauß über Schweikart, 1819	246
F. A. Taurinus	246—252
Aus der Vorrede zu den Elementa, 1826	247—248
Gauß an Taurinus, 1824	249—250
Würdigung von Schweikart und Taurinus	251—252
Litteratur	253—254
Stücke aus der Theorie der Parallellinien von F. A. Tau-	
rinus, 1825	255—266
Stücke aus den Geometriae prima elementa von F. A. Tau-	
rinus, 1826	267—283
Abweichungen vom Urtext der Elementa	284—286

	Seite
Verzeichnis von Schriften über die Parallelentheorie, die bis	
zum Jahre 1837 erschienen sind	287—313
Einleitung	289—290
Bibliographische Quellen in chronologischer Reihenfolge	291—292
Verzeichnis der Schriften nach den Jahren ihres Er-	
scheinens	293—313
Alphabetisches Verzeichnis der Autoren dieser Schriften	314—316
<i>Nachträge und Berichtigungen</i>	317—320
Alphabetisches Verzeichnis der im Texte besprochenen oder erwähnten	
Autoren	321—325
Tafel am Ende des Buches: Nachbildung eines Briefes von Gauß an Taurinus	
vom 8. November 1824.	

EUKLID

UM 300 V. CHR.

Die Geschichte der Parallelentheorie beginnt mit den Griechen oder genauer mit Euklid, denn erst die Griechen haben die Mathematik zu dem Range einer Wissenschaft erhoben, indem sie nicht nur den mathematischen Kenntnissen, die ihnen von den Ägyptern überkommen waren, viel Neues hinzufügten, sondern auch vor allem das mathematische Beweisverfahren in seiner vollen Strenge ausbildeten und die einzelnen Sätze zu einem zusammenhängenden Ganzen vereinigten. Euklids Elemente stellen uns das endgültige Ergebnis dieser jahrhundertelangen Entwicklung dar.

Für die Parallelentheorie kommt nur das erste Buch der Elemente in Betracht. Beim ersten Anblick erscheint es als eine willkürliche Zusammenstellung von Lehrsätzen und Aufgaben, aber bei tieferem Eindringen zeigt sich, daß man es mit einem wohlgedachten Systeme zu thun hat. Es ist kein Zufall, daß die ersten achtundzwanzig Sätze von der fünften Forderung, dem sogenannten Parallelenaxiom, durchaus unabhängig sind, und daß dieses erst beim Beweise des neunundzwanzigsten Satzes eintritt, es ist kein Zufall, daß der Außenwinkel des Dreiecks an zwei Stellen behandelt wird: zuerst, in Satz 16, wird nur gezeigt, daß er größer ist als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel, und erst später, in Satz 32, stellt sich heraus, daß der Außenwinkel der Summe jener beiden inneren Winkel genau gleich ist.

Diese Anordnung berechtigt zu dem Schlusse, daß Euklid die in der Parallelentheorie verborgene Schwierigkeit sehr wohl durchschaut hat.

Als Euklid Sätze beweisen wollte, welche die geometrische Anschauung unmittelbar liefert, zum Beispiel das Vorhandensein von Rechtecken, reichten die Grundsätze und Forderungen nicht mehr aus, die für die ersten achtundzwanzig Sätze genügt hatten; er führte deshalb eine neue Forderung ein, seine fünfte:

Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert,

schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Es gehörte ein gewisser Mut dazu, eine solche Forderung neben den andern, so überaus einfachen Grundsätzen und Forderungen auszusprechen, und es ist daher erklärlich, daß man schon im Altertum Versuche machte, ein folgerichtiges System der Geometrie in einfacherer Weise aufzubauen. Über diese Versuche hat uns Proklos in seinem Kommentar zum ersten Buche der Euklidischen Elemente ausführlich berichtet. Er machte selbst einen Versuch, indem er vorschlug, man solle Euklids Erklärung der parallelen Geraden aufgeben und die beständige Gleichheit des Abstandes als charakteristisches Merkmal benutzen. Freilich hat im Altertum keiner dieser Versuche, die im Grunde die fünfte Forderung nur durch eine andere, auch nicht einfachere ersetzen, die Euklidische Darstellung zu verdrängen vermocht.

Wenn wir im folgenden das erste Buch der Elemente bis zum zweiunddreißigsten Satze im Auszuge mitteilen, so geschieht dies nicht nur, weil die ganze weitere Entwicklung der Parallelentheorie auf dieser Grundlage beruht, sondern auch aus einem äußeren Grunde: die älteren Schriftsteller, zum Beispiel Saccheri und Lambert, setzten euklidfeste Leser voraus und durften das, man kann sie daher nicht lesen, ohne die Elemente oder wenigstens das erste Buch zur Hand zu haben.

Wir hielten es für das Beste, keine der älteren Euklid-Übersetzungen zu benutzen, vielmehr haben wir uns möglichst eng an den griechischen Text angeschlossen, wie er in Heibergs neuer ausgezeichneten Ausgabe vorliegt. Das ist insofern von Bedeutung, als gerade beim ersten Buche die Überlieferung des Textes schwankend ist. Wir folgen Heiberg auch in der Beziehung, daß wir von der fünften Forderung, nicht vom elften Axiom, sprechen, und daß wir diese Forderung nicht für einen späteren Zusatz halten.

Die Beweise der Sätze haben wir nur dann mitgeteilt, wenn sie entweder von den gegenwärtig üblichen erheblich abweichen, oder für das Verständnis der Euklidischen Parallelentheorie unentbehrlich sind. Mit dem zweiunddreißigsten Satze brechen wir ab, weil die folgenden Sätze für unseren Zweck nicht in Betracht kommen, wollen aber noch bemerken, daß die Entwicklungen des ersten Buches der Elemente in dem pythagoreischen Lehrsätze (Satz 47 und 48) ihren Zielpunkt haben.

Litteratur.

- Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Bd. I. Zweite Aufl. Leipzig 1893. Kap. 12.
- Hankel, H., *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Leipzig 1874.
- Hauber, C. F., *Chrestomathia geometrica*. Tübingen 1820.
- Heiberg, J. L., *Euclidis Elementa*. 5 Bände. Leipzig 1883—1888.
- Lindemann, F., *Vorlesungen über Geometrie*. Bd. II. T. I. S. 540—558. Leipzig 1891.
- Maier, L., *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*. (Programm des Gymnasiums zu Tübingen. 1875.)
- Proklos, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*. Ex recognitione E. Friedlein. Leipzig 1863.
- Riccardi, P., *Saggio di una bibliografia euclidea*. (Memorie della R. Accademia di Bologna, serie 4, tomo VIII, 1887, S. 401—528; tomo IX, 1888, S. 321—343; serie 5, tomo I, 1890, S. 27—84.)
- Tannery, P., *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* (Bulletin des sciences mathématiques, série 2, tome VIII, 1884, S. 162—175), und: *La constitution des éléments* (a. a. O. série 2, tome X, 1886, S. 183—205).
-

Euklids Elemente.

Erstes Buch.

Erklärungen. Forderungen. Grundsätze. Satz 1—32.

Erklärungen.

1. Was keine Teile hat, ist ein Punkt.
2. Eine Länge ohne Breite ist eine Linie.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.
5. Was nur Länge und Breite hat, ist eine Fläche.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine Fläche ist eben, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Geraden auf einerlei Art gelegen ist.
8. Ein ebener Winkel ist die gegenseitige Neigung zweier Linien, die sich in einer Ebene treffen, ohne in einer geraden Linie zu liegen.
9. Sind die den Winkel einschließenden Linien gerade, so heisst der Winkel geradlinig.
10. Wenn eine Gerade, die auf einer anderen errichtet ist, zu beiden Seiten gleiche Winkel bildet, so ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter, und die errichtete Gerade heisst senkrecht zu der, auf der sie errichtet ist.
11. Stumpf ist ein Winkel, der gröfser ist als ein Rechter.
12. Spitz aber einer, der kleiner ist als ein Rechter.
13. Das Ende eines Dinges bildet dessen Grenze.
14. Was von einer oder von mehreren Grenzen eingeschlossen wird, ist eine Figur.
15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie eingeschlossene Figur, bei der die Geraden, die sich nach ihr von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur erstrecken, alle einander gleich sind.

16. Dieser Punkt wird der Mittelpunkt des Kreises genannt.

17. Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten durch den Umfang des Kreises begrenzte Gerade; diese halbiert den Kreis.

18. Ein Halbkreis ist die Figur, die von einem Durchmesser und dem von ihm abgeschnittenen Bogen eingeschlossen wird. Der Mittelpunkt des Halbkreises ist derselbe wie der des Kreises.

19. Geradlinige Figuren sind solche, die von geraden Linien eingeschlossen werden, und zwar sind sie dreiseitig, wenn sie von drei, vierseitig, wenn sie von vier, vielseitig, wenn sie von mehr als vier Geraden eingeschlossen werden.

20. Unter den dreiseitigen Figuren ist ein gleichseitiges Dreieck die mit drei gleichen Seiten, ein gleichschenkliges Dreieck die mit nur zwei gleichen Seiten, endlich ein ungleichseitiges die mit drei ungleichen Seiten.

21. Unter den dreiseitigen Figuren ist ferner ein rechtwinkliges Dreieck die mit einem rechten Winkel, ein stumpfwinkliges die mit einem stumpfen Winkel, endlich ein spitzwinkliges die mit drei spitzen Winkeln.

22. Unter den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat eine solche, die gleichseitig und rechtwinklig ist, ein Rechteck eine solche, die rechtwinklig, aber nicht gleichseitig ist, ein Rhombus eine solche, die gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist, ein Rhomboid eine solche, deren gegenüberliegende Seiten und Winkel gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinklig ist. Alle übrigen vierseitigen Figuren sollen Trapeze heißen.

23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und, nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen.

Forderungen.

1. Es soll gefordert werden, daß sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

2. Ferner, daß sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

3. Ferner, daß sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

4. Ferner, daß alle rechten Winkel einander gleich seien.

5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind

als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schliesslich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Grundsätze.

1. Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.
2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.
3. Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so sind die Reste gleich.
7. Was zur Deckung mit einander gebracht werden kann, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist gröfser als sein Teil.
- [9. Zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein*.)]

1.

Über einer gegebenen begrenzten Geraden ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

2.

An einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen Geraden gleiche Gerade zu legen.

3.

Wenn zwei ungleiche Gerade gegeben sind, von der gröfseren eine der kleineren Geraden gleiche Gerade abzuschneiden.

4.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten der Reihe nach zwei Seiten gleich, und sind die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind auch die Grundlinien gleich, und das eine Dreieck ist dem anderen gleich, und die übrigen Winkel, nämlich die gleichen Seiten gegenüberliegenden, sind der Reihe nach den übrigen gleich**).

*) [Die Grundsätze 4 bis 6 und 9 rühren vermutlich nicht von Euklid her.]

***) [Euklid hat gewifs absichtlich in dem ganzen ersten Buche den Begriff der Bewegung nur bei dem Beweise des ersten Kongruenzsatzes benutzt. Still-schweigend macht er hier sogar von der Umlegung Gebrauch. Sollte ihm entgangen sein, daß bei der Geometrie der Ebene zwischen Bewegung und Umlegung ein wesentlicher Unterschied besteht?]

5.

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und verlängert man die gleichen Geraden, so sind die Winkel unterhalb der Grundlinie einander gleich.

[Da Euklid an dieser Stelle die Konstruktion des Lotes von der Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks $BA\Gamma$ auf die Grundlinie $B\Gamma$ noch nicht gelehrt hat, verfährt er so: AB und $A\Gamma$ werden um die gleichen Stücke BZ und ΓH verlängert, und es wird BH und ΓZ gezogen. Dann ist nach Lehrsatz 4 das Dreieck ABH dem Dreieck $A\Gamma Z$ kongruent, also $Z\Gamma$ gleich HB und der Winkel ABH gleich dem Winkel $A\Gamma Z$. Hieraus folgt, daß, wieder nach Lehrsatz 4, das Dreieck ΓHB dem Dreieck $BZ\Gamma$ kongruent, also der Winkel ΓBH gleich dem Winkel $B\Gamma Z$ ist. Mithin ist auch nach Grundsatz 3 der Winkel $AB\Gamma$ gleich dem Winkel $A\Gamma B$. Endlich folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $B\Gamma Z$ und ΓBH , daß auch die Winkel unterhalb der Grundlinie $B\Gamma$ gleich sind.]

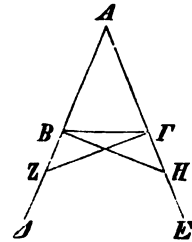


Fig. 1.

6.

Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

[Beweis: Es sei der Winkel $AB\Gamma$ gleich dem Winkel $B\Gamma A$. Wäre AB größer als $A\Gamma$, so mache man AB gleich $A\Gamma$ und ziehe $A\Gamma$. Dann wären nach Lehrsatz 4 die Dreiecke $AB\Gamma$ und $A\Gamma B$ kongruent, was gegen Grundsatz 8 verstößt.]

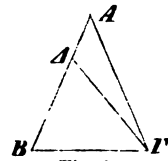


Fig. 2.

7.

Sind von den Endpunkten einer Geraden nach einem Punkte außerhalb zwei Gerade gezogen, so kann man nicht von diesen Endpunkten aus nach einem anderen Punkte auf derselben Seite jener Geraden zwei Gerade ziehen, die den ersten beziehungsweise gleich sind.

[Beweis: Es sei $A\Gamma = A\Delta$, $B\Gamma = B\Delta$. Man ziehe $\Gamma\Delta$. Dann ist nach Lehrsatz 5 der Winkel $\Delta A\Gamma$ gleich dem Winkel $A\Gamma\Delta$, folglich nach Grundsatz 8 $B\Delta\Gamma$ größer als $B\Gamma\Delta$. Andererseits ist aber, wieder nach Lehrsatz 5, der Winkel $B\Delta\Gamma$ gleich dem Winkel $B\Gamma\Delta$, was unmöglich ist.]

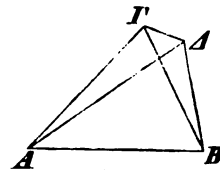


Fig. 3.

Auf ähnliche Art wird der Beweis in dem von Euklid nicht ausdrücklich erwähnten Falle geführt, daß Δ innerhalb des Dreiecks $A\Gamma B$ liegt.]

8.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten der Reihe nach zwei Seiten gleich und sind außerdem die Grundlinien gleich, so sind auch die Winkel gleich, die von gleichen Seiten eingeschlossen werden.

9.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren.

10.

Eine gegebene begrenzte Gerade zu halbieren.

11.

Aus einem gegebenen Punkte einer gegebenen Geraden eine Gerade unter rechtem Winkel zu ziehen.

12.

Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade von einem gegebenen Punkte aus, der nicht auf ihr liegt, das Lot zu fällen.

13.

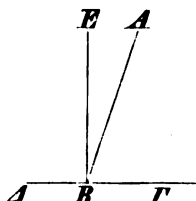


Fig. 4.

Die Winkel, die eine Gerade mit einer anderen bildet, auf der sie steht, sind entweder beide rechte oder zusammen gleich zwei Rechten.

[Beweis: Sind die Winkel einander gleich, so sind sie zwei Rechte. Sind sie ungleich, so errichte man in B die Senkrechte BE . Mittelst der Grundsätze 1 und 2 beweist man dann, daß die Summe von $\angle B A \Gamma$ und $\angle A B \Delta$ gleich der Summe von $\angle E B \Gamma$ und $\angle E B \Delta$ ist.]

14.

Gehen durch einen und denselben Punkt einer Geraden zwei nicht auf derselben Seite liegende Gerade, und bilden sie mit dieser Geraden Winkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, so liegen sie auf einer Geraden.

15.

Wenn zwei Gerade einander schneiden, so sind die von ihnen gebildeten Scheitelwinkel gleich.

16.

Wenn man bei irgend einem Dreieck eine der Seiten verlängert, so ist der Außenwinkel gröfser als jeder der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel.

Das Dreieck sei $AB\Gamma$, und man verlängere eine seiner Seiten $B\Gamma$ bis A . Ich behaupte, dafs der Außenwinkel $A\Gamma A$ gröfser ist als jeder der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel ΓBA und $B A \Gamma$.

Man halbiere $A\Gamma$ in E , ziehe BE , verlängere es bis Z und mache EZ gleich BE . Man ziehe noch $Z\Gamma$, und verlängere $A\Gamma$ bis H .

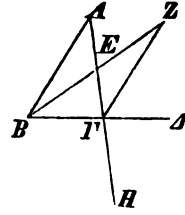


Fig. 5.

Da nun AE gleich $E\Gamma$ ist und BE gleich EZ , so sind die beiden Geraden AE und EB der Reihe nach gleich den beiden Geraden ΓE und EZ , und da die Winkel AEB und $Z E \Gamma$ als Scheitelwinkel gleich sind, so ist auch die Grundlinie AB der Grundlinie $Z\Gamma$ gleich, und das Dreieck ABE gleich dem Dreieck $Z E \Gamma$, und die beiden übrigen Winkel sind der Reihe nach den beiden übrigen Winkeln gleich, die nämlich, die gleichen Seiten gegenüberliegen. Daher ist der Winkel BAE gleich dem Winkel $E\Gamma Z$. Nun ist der Winkel $E\Gamma A$ gröfser als der Winkel $E\Gamma Z$, folglich ist auch der Winkel $A\Gamma A$ gröfser als der Winkel $B A E$.

In ähnlicher Weise zeigt man nach Halbierung der Geraden $B\Gamma$, dafs der Winkel $B\Gamma H$ gröfser ist als der Winkel $AB\Gamma$, das heifst, dafs der Winkel $A\Gamma A$ gröfser ist als der Winkel $AB\Gamma^*$).

17.

In jedem Dreieck sind irgend zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.

18.

In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite auch der gröfsere Winkel gegenüber.

[Beweis: Da $A\Gamma$ gröfser als AB ist, so mache man AA gleich AB und ziehe BA . Dann ist der Winkel AAB gleich dem Winkel ABA . Nun ist, nach Lehrsatz 16, AAB gröfser als ΓAB . Mithin ist auch ABA , also um so mehr $AB\Gamma$ gröfser als ΓAB .]

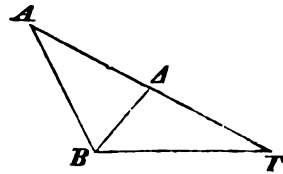


Fig. 6.

19.

In jedem Dreieck liegt dem gröfseren Winkel auch die gröfsere Seite gegenüber.

[Beweis indirekt aus Satz 5 und 18.]

*) [Bei diesem Beweise wird als selbstverständlich angenommen, dafs der Punkt Z auf derselben Seite der Geraden $B\Gamma$ liegt wie der Punkt A ; hierin steckt die von Euklid nicht ausdrücklich ausgesprochene, wesentliche Voraussetzung, dafs jede Gerade eine unendliche Länge hat.]

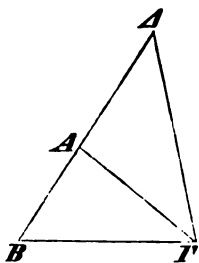


Fig. 7.

20.

In jedem Dreieck sind irgend zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

[Beweis: Man verlängere BA um AF bis F und ziehe CF . Dann ist, nach Lehrsatz 19, BA größer als BF , also sind auch BA und AF zusammen größer als BF .]

21.

Verbindet man die Endpunkte einer Dreiecksseite mit einem Punkte im Innern des Dreiecks, so sind die Verbindungslinien zusammen kleiner als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks zusammengenommen; dagegen schließen sie einen größeren Winkel ein.

22.

Aus drei Geraden, die drei gegebenen gleich sind, ein Dreieck zu konstruieren; es müssen aber irgend zwei von ihnen zusammen größer sein als die dritte.

23.

An eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte einen geradlinigen Winkel anzutragen, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist.

24.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten der Reihe nach zwei Seiten gleich sind, und der Winkel, den die gleichen Seiten einschließen, in dem einen größer ist als in dem andern, so ist die Grundlinie in jenem größer als in diesem.

25.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten der Reihe nach zwei Seiten gleich sind, und die Grundlinie des einen größer ist als die Grundlinie des andern, so ist der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in jenem größer als in diesem.

26.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel der Reihe nach zwei Winkeln gleich sind, und eine Seite einer Seite gleich ist, nämlich entweder die an den gleichen Winkeln oder die einem der gleichen Winkel gegenüberliegende, so sind auch die beiden übrigen Seiten der Reihe nach gleich und der dritte Winkel dem dritten.

[Der Beweis wird von Euklid für jeden der beiden Teile des Satzes besonders geführt. In der That besteht zwischen beiden ein wesentlicher Unterschied: Beim Beweis des zweiten Teiles kann nämlich der Satz 16,

vom Außenwinkel, nicht entbehrt werden, während der erste Teil, ebenso wie die früheren Kongruenzsätze, durchaus davon unabhängig ist.]

27.

Wenn eine Gerade, die zwei Gerade trifft, mit ihnen gleiche Wechselwinkel bildet, so sind diese Geraden einander parallel.

Die Gerade EZ schneide die beiden Geraden AB und ΓA und bilde die einander gleichen Wechselwinkel AEZ und EZA . Ich behaupte, daß die Gerade AB der Geraden ΓA parallel ist.

Denn wären sie es nicht, so träfen die Verlängerungen von AB und ΓA entweder auf der Seite von B, A oder auf der Seite von A, Γ zusammen. Es mögen ihre Verlängerungen auf der Seite von B, A im Punkte H zusammentreffen. Dann wäre in dem Dreieck HEZ der Außenwinkel AEZ gleich dem inneren, gegenüberliegenden Winkel EZH , was unmöglich ist. Folglich treffen die Verlängerungen von AB und ΓA auf der Seite von B, A nicht zusammen.

Auf ähnliche Art wird man beweisen, daß sie auch nicht auf der Seite von A, Γ zusammentreffen. Aber Gerade, die auf keiner Seite zusammentreffen, sind parallel. Also ist die Gerade AB der Geraden ΓA parallel.

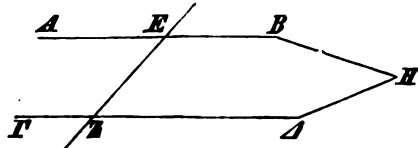


Fig. 8.

28.

Wenn eine Gerade, die zwei Gerade trifft, mit ihnen entweder einen äußeren Winkel bildet, der dem inneren, entgegengesetzten, auf derselben Seite befindlichen Winkel gleich ist, oder innere Winkel auf derselben Seite, die zusammen gleich zwei Rechten sind, so sind diese Geraden einander parallel.

29.

Wenn eine Gerade zwei parallele Gerade schneidet, so bildet sie gleiche Wechselwinkel; ferner ist jeder äußere Winkel dem inneren, entgegengesetzten gleich, und die inneren, auf derselben Seite liegenden Winkel sind zusammen gleich zwei Rechten.

Die Gerade EZ schneide nämlich die parallelen Geraden AB und ΓA . Ich behaupte, daß sie gleiche Wechselwinkel $AH\theta$ und $H\theta A$ bildet, daß der äußere Winkel EHB dem inneren, entgegengesetzten $H\theta A$ gleich ist, und daß die inneren, auf derselben Seite befindlichen Winkel $BH\theta$ und $H\theta A$ zusammen gleich zwei Rechten sind.

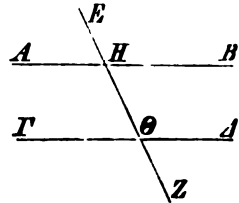


Fig. 9.

Wenn nämlich der Winkel $AH\theta$ von dem Winkel $H\theta A$ verschieden ist, so ist einer von beiden größer. Es möge $AH\theta$ größer sein. Man füge zu beiden den Winkel $BH\theta$ hinzu. Dann sind die Winkel $AH\theta$ und

$BH\theta$ zusammen größer als $BH\theta$ und $H\theta A$. Aber $AH\theta$ und $BH\theta$ sind zusammen gleich zwei Rechten, mithin sind $BH\theta$ und $H\theta A$ zusammen kleiner als zwei Rechte.

Werden aber zwei Gerade unter Winkeln, die kleiner sind als zwei Rechte, ins Unendliche verlängert, so treffen sie zusammen.

Mithin werden AB und ΓA , ins Unendliche verlängert, zusammen treffen. Sie können jedoch nicht zusammentreffen, weil sie nach der Voraussetzung parallel sind. Folglich ist der Winkel $AH\theta$ nicht verschieden von dem Winkel $H\theta A$, also ihm gleich.

Ferner ist der Winkel $AH\theta$ gleich dem Winkel EHB , und deshalb auch der Winkel EHB gleich dem Winkel $H\theta A$. Man füge zu beiden den Winkel $BH\theta$ hinzu, so sind EHB und $BH\theta$ zusammen gleich $BH\theta$ und $H\theta A$. Aber EHB und $BH\theta$ sind zusammen gleich zwei Rechten. Mithin sind auch $BH\theta$ und $H\theta A$ zusammen gleich zwei Rechten.

30.

Gerade Linien, die derselben Geraden parallel sind, sind auch einander parallel.

31.

Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade parallel zu einer gegebenen Geraden zu ziehen.

[Geschieht mit Hilfe von Satz 23 und 27.]

32.

In jedem Dreieck ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der Außenwinkel gleich der Summe der beiden inneren, gegenüberliegenden Winkel, und die drei inneren Winkel des Dreiecks sind zusammen gleich zwei Rechten.

Es sei $AB\Gamma$ ein Dreieck. Man verlängere eine Seite, etwa BI' , bis A . Ich behaupte, daß der Außenwinkel $A\Gamma A$ gleich den beiden inneren, ihm gegenüberliegenden Winkeln ΓAB und ABI' ist, und daß die drei inneren Winkel des Dreiecks, nämlich $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ und ΓAB gleich zwei Rechten sind.

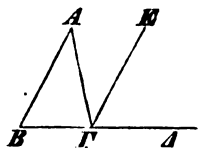


Fig. 10.

Man ziehe nämlich durch den Punkt Γ parallel der Geraden AB die Gerade ΓE . Da nun AB parallel ΓE ist, und diese Geraden von $A\Gamma$ geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel $B\Gamma\Gamma$ und $A\Gamma E$ einander gleich. Da ferner AB parallel ΓE ist, und diese Geraden von $B\Gamma$ geschnitten werden, so ist der äußere Winkel $E\Gamma A$ gleich dem inneren, entgegengesetzten Winkel ABI' . Es wurde aber bewiesen, daß auch $A\Gamma E$ gleich $B\Gamma\Gamma$ ist. Deshalb ist der ganze Winkel $A\Gamma A$ gleich den ihm gegenüberliegenden Winkeln $B\Gamma\Gamma$ und ABI' .

Fügt man zu beiden $A\Gamma B$ hinzu, so sind $A\Gamma A$ und $A\Gamma B$ zusammen gleich den drei Winkeln $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ und ΓAB . Aber $A\Gamma A$ und $A\Gamma B$ sind zusammen gleich zwei Rechten. Mithin sind auch $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ und ΓAB zusammen gleich zwei Rechten.

JOHN WALLIS

1616—1703.

Nach dem Untergange der antiken Kultur finden wir die ersten Spuren einer Beschäftigung mit Parallelentheorie bei den Arabern. Arabische Übersetzungen oder besser Bearbeitungen von Euklids Elementen hat es in erheblicher Anzahl gegeben, und es fehlte auch nicht an Bemühungen, die fünfte Forderung zu beweisen. Einfluß auf die spätere Entwicklung der Parallelentheorie hatte jedoch nur Nasir Eddin (1201—1274), dessen Euklid-Bearbeitung 1594 zu Rom in arabischer Sprache gedruckt worden ist. Eine lateinische Übersetzung der weitläufigen Betrachtungen Nasir Eddins, die den Beweis der fünften Forderung bezwecken, findet man im zweiten Bande der Werke von Wallis, der sie 1651 an der Universität Oxford öffentlich vorgetragen hatte; nach Wallis hat Saccheri 1733 eine kritische Darstellung dieses Beweisversuches gegeben.

Die lateinischen Euklidausgaben des 15. Jahrhunderts enthalten die fünfte Forderung ohne jede erklärende Bemerkung, und zwar als elftes unter den sogenannten Axiomen (den Grundsätzen), ein Gebrauch, der sich schon bei Proklos findet, der jedoch der Berechtigung entbehrt, wie die von Peyrard im Jahre 1814 herausgegebene älteste der jetzt bekannten Euklid-Handschriften gezeigt hat. Im Jahre 1533 erschien dann die erste griechische Ausgabe von Euklids Elementen mit dem beigefügten Kommentar des Proklos, und bald darauf gab Barozzi eine lateinische Übersetzung des Proklos. Das Verdienst, auf diesen ältesten uns erhaltenen Kommentar des Euklid aufmerksam gemacht zu haben, darf Petrus Ramus (1569) für sich in Anspruch nehmen; freilich war bei ihm das Interesse für Mathematik größer als die mathematische Befähigung. Neben ihm kommt der Deutsche Christoph Schlüssel, bekannt als Clavius, in Betracht, dessen Euklidausgabe von 1574, die bis 1738 nicht weniger als 22mal gedruckt worden ist, alles damals Bekannte zusammenfasste; Kästner hat sie die „Pandekten der Elementargeometrie“ genannt. Clavius ersetzt die Euklidische Darstellung in einer Anmerkung durch eine andere; er sucht durch die Anschauung zu begründen, daß eine Linie, bei der jeder Punkt von einer gegebenen Geraden dieselbe Entfernung hat, wieder eine gerade Linie sein müsse. Dabei zeichnet er eine

Figur, die wir später bei Giordano da Bitonto (1680) und Saccheri (1733) wieder antreffen werden.

Mit dem Beginn des siebzehnten Jahrhunderts begegnen uns schon Veröffentlichungen, die ausschliesslich der Theorie der Parallelen gewidmet sind: 1603 erscheint Cataldi's *Operetta delle linee rette equidistanti et non equidistanti*, und 1604 Oliver of Bury's: *De rectarum linearum parallelismo et concursu doctrina geometrica*; so weit wir sie kennen, enthalten diese Abhandlungen allerdings nichts wesentlich Neues.

Das Interesse für die Grundlagen der Geometrie war damals besonders in Italien und in England rege. In Frankreich hatte Ramus solchen Bestrebungen gegenüber geäußert, es komme in der Geometrie nicht darauf an, alles auf wenige Grundsätze zurückzuführen, vielmehr bedürfe, was an sich klar sei, keines Beweises, und diese Ansicht hat dort die Lehrbücher der Elementargeometrie fast bis ans Ende des achtzehnten Jahrhunderts beherrscht. Zum Beispiel geht Clairaut (1741) davon aus, daß das Vorhandensein von Rechtecken durch die Anschauung gegeben sei, und leitet dann mit großer Klarheit die Sätze des ersten Euklidischen Buches ab. Zu vergessen ist freilich nicht, daß die Parallelentheorie dem Franzosen Desargues (1639) die neue, fruchtbare Erklärung der Parallellinien verdankt: Linien heißen parallel, wenn sie denselben unendlich fernen Punkt gemeinsam haben. Diese Erklärung ist für die neuere Geometrie, besonders, nachdem sie Steiner wieder aufgenommen hatte (*Systematische Entwicklung*, 1832, *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 240), äußerst folgenreich geworden.

Auf die Entwicklung der Parallelentheorie in Italien werden wir bei den Vorbemerkungen zu Saccheri's *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) zurückkommen. In England war es besonders Sir Henry Savile, der ein außerordentliches Interesse für Euklids Elemente an den Tag legte. Er hielt über diesen Gegenstand an der Universität Oxford Vorlesungen, in denen er freilich nur bis zum achten Satze des ersten Buches gelangte. Aus seinen *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis*, Oxford 1621, teilen wir eine bemerkenswerte Stelle mit. S. 140 heisst es: In pulcherrimo Geometriae corpore duo sunt naevi, duae labes nec quod sciam plures, in quibus eluendis et emaculandis cum veterum tum recentiorum, ut postea ostendam, vigilavit industria. Diese beiden Makel sind die Theorie der Parallellinien und die Lehre von den Proportionen. Savile hat auch einen mathematischen Lehrstuhl an der Universität Oxford gestiftet, der noch jetzt besteht, und dessen Inhaber die Verpflichtung hat, über Euklids Elemente Vorlesungen zu halten.

Einer der ersten dieser Professores Saviliani war John Wallis (1616—1703), dessen Verdienste um die Infinitesimalrechnung und um die Algebra bekannt sind; wir haben ihn schon erwähnt, als wir von Naşir Eddin sprachen. Eine weitere Vorlesung über Parallelen-theorie hat er in Erfüllung seiner Amtspflicht im Jahre 1663 gehalten. Diese ist es, die wir im folgenden in der Übersetzung mitteilen. Beide Vorlesungen hat Wallis 1693 im zweiten Bande seiner Werke auf S. 665—678 veröffentlicht und lehrreiche Bemerkungen über die Geschichte der Parallelentheorie hinzugefügt.

Der neue Gedanke von Wallis besteht darin, daß er zwar Euklids Erklärung der Parallelen beibehält, aber die fünfte Forderung durch die andere ersetzt, *daß sich zu jedem Dreiecke ein ähnliches in beliebig großem Maßstabe zeichnen lasse*. Übrigens hat er die Tragweite seiner Forderung nicht vollständig durchschaut; Saccheri sah in dieser Beziehung weiter als er. Saccheri weist nämlich nach, daß die Euklidische Geometrie in aller Strenge begründet werden kann, sobald auch nur zu einem einzigen Dreieck ein von ihm verschiedenes gehört, das dieselben Winkel aufweist; allerdings stützt er sich dabei auf den Satz vom Außenwinkel. Entsprechende Bemerkungen finden sich auch bei Lambert.

Es möge noch bemerkt werden, daß dieser Wallis'sche Gedanke in der Geschichte der Parallelentheorie wiederholt von neuem auftaucht, zum Beispiel haben Carnot und Laplace vorgeschlagen, die fünfte Forderung durch das Princip der Ähnlichkeit zu ersetzen, und in neuester Zeit ist dieser Gedanke von Delbœuf ausführlich erörtert worden. Auch der analytische Beweis, den Legendre in seinen Elementen für den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks zu geben versucht hat, kommt im Grunde auf dieselbe Idee hinaus.

Litteratur.

- Cantor, M., *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, besonders Bd. I, Kap. 36, und Bd. III, Kap. 83.
 Castillon, *Sur les parallèles d'Euclide*. Mémoires de Berlin, Années 1786/87. S. 253—254, années 1788/89, S. 171—203.
 Clairaut, *Eléments de Géométrie*. Paris 1741.
 Clavius, *Euclidis elementorum libri XV . . . omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati*. Rom 1574.
 Delbœuf, *Prolegomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats*. Liège 1860.
 Delbœuf, *L'ancienne et les nouvelles géométries*, Revue philosophique, dirigée par Th. Ribot. T. XXXVI. 1893. S. 449—484. T. XXXVII. 1894. S. 353—383.

- Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*. 1639. S. Œuvres de Desargues, Paris 1864, Bd. I, S. 104 f.
- Gergonne, *Annales de —*. T. X. 1819. S. 161—184: *Sur l'emploi de l'algorithme des fonctions, dans la démonstration des théorèmes de géométrie*; vgl. auch T. XV, 1824, S. 83.
- Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme*. Leipzig 1867. S. 59.
- Klängel, *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum stabiliendi recensio*. Dissertation. Göttingen 1763.
- Laplace, *Exposition du système du monde*. 5ième édition. Paris 1824. Livre V, chap. 5, note.
- Legendre, *Elémens de géométrie*. 1ière éd. Paris 1794. 12ième éd. 1823.
- Loria, *Delle varie fortune di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare*. Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario. Anno VIII. Rom 1893.
- Moebius, *Barycentrischer Calcul*. 1827. Kapitel 2. Gesammelte Werke. Bd. 1. S. 176.
- Peyrard, *Les œuvres d'Euclide*. Paris 1814.
- Ramus, *Scholarum mathematicarum libri XXXI*. Basel 1569.
- Savile, *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis*, Oxonii habitae 1620. Oxford 1621.
- Sohnke, Artikel *Parallel* in der Allgemeinen Encyclopädie der Wissenschaften und Künste von Ersch und Gruber. Dritte Section. Bd. 11. S. 368—384, Leipzig 1838.
- Steinschneider, *Euclid bei den Arabern*. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Hist.-lit. Abt. Leipzig 1886. S. 81—100.
- Wallis, *De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euclidis disceptatio geometrica*. Operum mathematicorum Volumen alterum. Oxford 1693. S. 665—678.

Beweis

674

der fünften Forderung Euklids,

öffentlich vorgetragen in Oxford am Abend des 11. Juli 1663.

Bekanntlich haben einige alte wie auch einige neuere Autoren es dem Euklid zum Vorwurf gemacht, daß er die fünfte Forderung, oder (wie andere sagen) das elfte Axiom oder (nach der Zählung des Clavius) das dreizehnte Axiom ohne Beweis zugestanden haben will, während er es doch (wie jene glauben) hätte beweisen sollen. Namentlich hat man getadelt, daß er für gerade Linien etwas als an sich einleuchtend annimmt, was für Linien im allgemeinen gar nicht richtig ist. Denn allerdings mag für gerade Linien allgemein richtig sein, was er behauptet, nämlich:

Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und die innern Winkel, die diese an derselben Seite bildet, zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so treffen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, einander schließlicly auf der Seite, wo jene beiden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, für krumme Linien ist es jedoch nicht allgemein richtig. Es können ja zwei Curven oder eine Gerade und eine Curve einander beständig näher kommen, ohne doch jemals zusammenzutreffen.

Indefs stützen die meisten dieser Ankläger des Euklid (wenigstens soweit ich sie bis jetzt geprüft habe) ihre Beweise auf andere Annahmen, die man, wie mir scheint, keineswegs leichter zugeben wird, als das, was Euklid fordert, und sie verfallen sogar nicht selten gerade in den Fehler, den sie vermeiden wollen, indem sie nämlich für gerade Linien etwas als unzweifelhaft richtig annehmen, was für Linien im allgemeinen nicht richtig ist, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*).

*) [Opera, t. II. S. 668 in der Einleitung zu den beiden Vorlesungen von 1651 und 1663.]

Ich meinesteils gestehe dem Euklid unbedenklich zu, was er fordert, nicht nur, weil die Beweise der anderen an demselben Fehler leiden, den sie bei ihm tadeln, oder weil ihre Forderungen durchaus nicht einleuchtender sind, sondern weil man, wie mir scheint, unbedingt entweder diese Forderung oder statt ihrer eine andere stellen muß, und endlich, weil man, die Beweisbarkeit dieser Forderung zugestanden, als Grundsatz nicht nur das gelten zu lassen pflegt, was gar nicht beweisbar ist, sondern auch das, was an sich so klar ist, daß es keines Beweises bedarf; denn sicherlich können einige der übrigen Axiome bewiesen werden, und das zu zeigen wäre nicht schwer, wenn es dessen bedürfte.

Da ich aber sehe, wie viele bis jetzt einen Beweis jener Forderung versucht haben, in der Meinung, daß sie eines Beweises bedürftig sei, will auch ich meinen Beitrag liefern und versuchen, ob ich nicht einen Beweis liefern kann, der weniger angreifbar ist als die bis jetzt von anderen gelieferten Beweise.

Den Beweis für die Behauptung erbringe ich nun auf Grund einiger Hilfssätze, die ich vorausschicke, wie folgt:

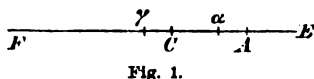


Fig. 1.

I. Wird eine begrenzte Gerade, die auf einer unbegrenzten Geraden liegt, geradlinig verlängert, so liegt auch die Verlängerung auf dieser unbegrenzten Geraden.

Es sei $EACF$ die unbegrenzte Gerade, und die auf ihr liegende begrenzte Gerade AC möge geradlinig bis γ verlängert werden. Ich behaupte, daß die ganze Linie $AC\gamma$, das heißt, die Verlängerung von AC , auch auf der unbegrenzten Geraden ACF liegt.

Da nämlich nach der Voraussetzung ACF eine einzige Gerade ist, so liegt CF mit AC in gerader Linie. Es ist aber auch (da AC bis γ geradlinig verlängert wurde) $C\gamma$ die geradlinige Verlängerung von AC und liegt daher auf CF (denn alle Geometer nehmen an, daß an einem Endpunkt einer Geraden nicht verschiedene Gerade als Verlängerungen angesetzt werden können, und ungefähr dasselbe ist der Inhalt des dem Proklos entnommenen zehnten Axioms bei Clavius). Aber AC liegt nach der Voraussetzung ebenfalls auf ACF . Mithin liegt $AC\gamma$, die Verlängerung von AC , ganz auf der unbegrenzten Geraden ACF . Was zu beweisen war.

II. Denkt man sich eine begrenzte Gerade, die auf einer unbegrenzten Geraden liegt, in ihrer Richtung beliebig weit

fortbewegt, so bleibt sie bei dieser Bewegung stets auf derselben unbegrenzten Geraden.

Es sei AC die begrenzte Gerade, die auf der unbegrenzten Geraden AF liegt, und man denke sie sich in ihrer Richtung nach der Seite von C bewegt, sodafs der Punkt A in α und C in γ übergeht. Ich behaupte, dafs die Gerade $\alpha\gamma$, also die bewegte Gerade AC , auf derselben unbegrenzten Geraden AF liegt.

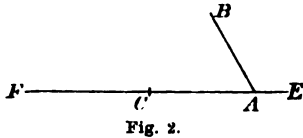
Es liegt nämlich $C\gamma$ auf der Verlängerung der Geraden AC (denn nach der Voraussetzung wird der Punkt C geradlinig, das heifst, 675 auf der Verlängerung der Geraden AC fortbewegt), also auch auf der unbegrenzten Geraden ACF (nach Hilfssatz I). Ebenso liegt auch α auf der (nötigenfalls verlängerten) Geraden AC (denn nach der Voraussetzung wird der Punkt A ebenfalls auf der Geraden AC geradlinig fortbewegt), also auch auf der unbegrenzten Geraden ACF . In ähnlicher Weise zeigt man dasselbe von jedem Zwischenpunkte der bewegten Geraden AC . Also liegt $\alpha\gamma$, das heifst die bewegte Gerade AC , ganz auf der unbegrenzten Geraden ACF . Was zu beweisen war.

Dasselbe könnte man auch in ähnlicher Weise zeigen, wenn dieselbe Gerade AC nach der Seite des Punktes A bewegt würde.

Man darf hier nicht einwenden, dafs Euklid bei seinen Beweisen die Bewegung einer Geraden noch nicht angewandt zu haben scheint und sie auch bei den Forderungen nicht erwähnt hat, denn, so gut er später bei der Erklärung der Kugel die Bewegung eines Kreises, bei der Erklärung des Kegels die Bewegung eines Dreiecks und bei der Erklärung des Cylinders die Bewegung eines Rechtecks anwendet, ebenso gut hätte er auch, falls es erforderlich gewesen wäre, die Bewegung einer Geraden bei seinen Beweisen anwenden können. Dasselbe thun ab und zu Archimedes, Apollonius und andere Geometer. Ja sogar Euklid selbst wendet, (und zwar gleich am Anfang), indem er den Satz 4 durch Aufeinanderlegen beweist, eine Bewegung von zwei Geraden an, deren Winkel unverändert bleibt, wie das zum Aufeinanderlegen nötig ist, (und in keinem anderen Sinne rede ich in meinem Lehrsatz von der Bewegung einer Geraden). Ferner wird dasselbe in der dritten Forderung angenommen (bei gegebenem Mittelpunkt und Halbmesser den Kreis zu beschreiben), denn man setzt (bei der Zeichnung des Kreises) voraus, dafs durch das Herumführen des Halbmessers (während der eine seiner Endpunkte im Mittelpunkte verharrt) die Kreisfläche beschrieben wird. Hieran erinnere ich, um nicht den Anschein zu erwecken, als (vernachlässigte ich die Euklidische Strenge des Beweises und) führte hier neue Forderungen ein (außer denen, die Euklid zuläfst).

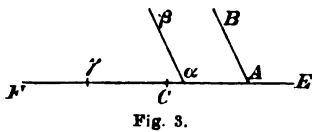
III. Liegt eine begrenzte Gerade auf einer unbegrenzten Geraden, und bildet eine auf ihr stehende Gerade mit ihr einen Winkel, so bildet sie mit der unbegrenzten Geraden denselben Winkel.

Es sei EAF eine unbegrenzte Gerade, und auf ihr liege die begrenzte Gerade AC , mit der die darauf stehende Gerade AB den Winkel BAC bildet. Dann behaupte ich, daß die Gerade AB mit der unbegrenzten Geraden AF denselben Winkel bildet. Da nämlich die Gerade AC auf der Geraden AF liegt, und da BA beide Male dasselbe ist, so sind BAC und BAF (durch Kongruenz) derselbe Winkel. Was zu beweisen war.



IV. Es liege eine begrenzte Gerade auf einer unbegrenzten Geraden. Wird sie auf dieser geradlinig fortbewegt, und macht eine auf ihr stehende Gerade (ohne Änderung des Winkels) die Bewegung mit, so bildet sie mit jener unbegrenzten Geraden überall dieselben (oder gleiche) Winkel.

Auf der unbegrenzten Geraden EAF möge die auf ihr liegende begrenzte Gerade AC geradlinig fortbewegt werden, und die auf dieser stehende Gerade AB mache ohne Änderung des Winkels die Bewegung so lange mit, bis sie, wenn AC in die Lage $\alpha\gamma$ gelangt, gleichzeitig nach $\alpha\beta$ gelangt. Dann behaupte ich, daß der Winkel $\beta\alpha F$ dem Winkel BAC oder BAF gleich ist.



Die Gerade AC geht nämlich bei ihrer Bewegung in die Gerade $\alpha\gamma$ über, die (nach Hilfssatz 2) auf der unbegrenzten Geraden AF liegt. Ferner bleibt (nach der Voraussetzung) der Winkel BAC , das heißt $\beta\alpha\gamma$, unverändert. Da endlich (nach Hilfssatz 3) dieser unveränderte Winkel zuerst mit dem Winkel BAF und dann mit dem Winkel $\beta\alpha F$ zur Deckung kommt, so sind mithin die Winkel BAF und $\beta\alpha F$ einander gleich. Was zu beweisen war.

In ähnlicher Weise könnte man zeigen, daß der Nebenwinkel $\beta\alpha A$ dem Winkel BAE gleich ist.

V. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, und sind die inneren Winkel an derselben Seite zusammen kleiner als zwei Rechte, so ist jeder der beiden Außenwinkel größer als der ihm gegenüberliegende innere Winkel.

Die Gerade ACF schneide die beiden Geraden AB und CD und bilde auf derselben Seite die inneren Winkel BAC und DCA , die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. Ich behaupte, daß der Außenwinkel DCF (der Nebenwinkel des inneren Winkels DCA) größer ist als der ihm gegenüberliegende innere Winkel BAC .

Die Winkel DCA und DCF sind nämlich (nach Satz 13 des ersten Buches) zusammen gleich zwei Rechten. Hingegen sind (nach der Voraussetzung) die beiden inneren Winkel DCA und BAC zusammen kleiner als zwei Rechte. Nimmt man also beide Male den gemeinsamen Winkel DCA fort, so ist der übrig bleibende DCF größer als der übrig bleibende BAC . Was zu beweisen war.

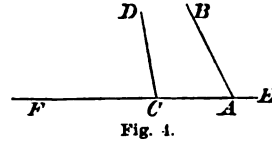


Fig. 1.

Ich berufe mich übrigens hier beim Beweise auf den Satz 13 des ersten Buches der Elemente, denn dieser steht zwar hinter der fünften Forderung, jedoch noch vor dem Satze 29 des ersten Buches, bei dessen Beweise diese Forderung zum ersten Male angewandt wird. Überhaupt ist hinter dem Satz 28 die richtige oder wenigstens die beste Stelle für den Beweis jener Forderung, und es dürfen dabei alle vorhergehenden Sätze oder beliebig viele davon ohne Bedenken für den Beweis verwendet werden. Man könnte auch den Satz 13 des ersten Buches (als einen weiteren Hilfssatz für den vorliegenden Lehrsatz) vorher beweisen, wenn es nötig wäre.

VI. Wird unter denselben Voraussetzungen die zwischen AB und CD liegende Gerade AC geradlinig bis in die Lage $\alpha\gamma$ bewegt, sodaß der Punkt α mit C zusammenfällt, und gelangt zugleich AB (ohne Änderung des Winkels BAC) in die Lage $\alpha\beta$, so behaupte ich, daß die ganze Gerade $\alpha\beta$, das heißt, die bewegte Gerade AB , außerhalb DC fällt.

Da nämlich (nach Hilfssatz 2) $\alpha\gamma$, das heißt $C\gamma$, auf CF liegt, und da (nach Hilfssatz 3 und 4) der Winkel BAC , das heißt BAF , dem Winkel $\beta\alpha F$, das heißt βCF gleich ist, und da endlich (nach Hilfssatz 5) der Winkel BAC kleiner ist als der Winkel DCF : so ist auch der Winkel βCF kleiner als derselbe Winkel DCF . Demnach fällt die Gerade $C\beta$, das heißt $\alpha\beta$, ganz außerhalb der Geraden CD (ganz, sage ich, denn sie kann CD nirgends anders als in dem Punkte C treffen, nach der letzten Forderung oder dem letzten Axiom, daß zwei Gerade keinen Raum einschließen).

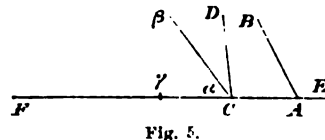


Fig. 5.

VII. Unter denselben Voraussetzungen behaupte ich, daß die Gerade $\alpha\beta$, das heisst AB , bei ihrer Bewegung die Gerade CD schneidet, ehe der Punkt α nach C gelangt.

Da nämlich (nach Hilfssatz 6), sobald der Punkt α nach C gelangt, die ganze Gerade $\alpha\beta$ die Gerade CD überschritten hat, so muß sie diesen Übergang entweder als Ganzes oder stückweise gemacht haben. Aber als Ganzes kann sie den Übergang nicht machen, sonst läge nämlich einmal die Gerade $\alpha\beta$ auf der Geraden CD , und der Winkel DCF deckte sich mit dem Winkel $\beta\alpha F$, ein größerer mit einem kleineren, was unmöglich ist. Mithin geschieht der Übergang stückweise, das heisst, die Gerade $\alpha\beta$ schneidet einmal die Gerade CD , dann nämlich, wenn ein Teil von ihr den Übergang gemacht hat, aber noch nicht die ganze Gerade, und zwar (nach Hilfssatz 6), bevor der Punkt α zum Punkte C gelangt ist. Was zu beweisen war.

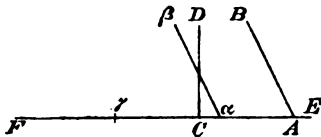


Fig. 6.

VIII. Schliesslich will ich (indem ich die Lehre von den Verhältnissen und den Begriff der ähnlichen Figuren als bekannt voraussetze) als Grundsatz annehmen:

Zu jeder beliebigen Figur gebe es stets eine andere ihr ähnliche von beliebiger Grösse.

Das scheint nämlich (da Grössen einer unbeschränkten Teilung und Vervielfachung fähig sind) aus dem Wesen der Grössenverhältnisse zu folgen, daß man nämlich jede Figur (während sie ihre Gestalt behält) unbeschränkt verkleinern und vergrößern kann.

In der That machen alle Geometer diese Annahme (ohne es ausdrücklich auszusprechen oder vielleicht selbst zu bemerken), und darunter auch Euklid. Denn, wenn er fordert, daß sich bei gegebenem Mittelpunkt und Halbmesser der Kreis beschreiben lasse, so setzt er voraus, daß es einen Kreis von beliebiger Grösse oder mit beliebig großem Halbmesser gebe, und, wenn er voraussetzt, daß etwas möglich sei, so fordert er, daß man es ausführen könne. Nun wäre es freilich kein billiges Verlangen, daß man (ohne die nötigen Vorkenntnisse) nach einem gegebenen Maassstabe zu jeder Figur eine ähnliche solle zeichnen können. Aber daß es ausführbar ist, das darf man bei einer beliebigen Figur ebenso gut wie beim Kreise voraussetzen. Denn nicht deshalb, weil er vor den übrigen Figuren etwas voraus hat, gestattet es der Kreis, daß man ihn ohne Änderung der Gestalt nach Belieben stetig vergrößert oder verkleinert, sondern wegen der

Eigenschaften der stetigen Gröſsen, die den übrigen Figuren mit dem Kreise gemeinschaftlich sind. Man darf demnach ebenso voraussetzen, daſs auch bei diesen (ohne Änderung der Gestalt) eine stetige und unbegrenzte Vergröſserung oder Verkleinerung möglich sei.

Gegen unsere Annahme darf man auch nicht einwenden, daſs Euklid an dieser Stelle weder die Erklärung proportionaler Gröſsen noch die Erklärung ähnlicher Dreiecke (die jene voraussetzt) gegeben hat, daſs er vielmehr die eine erst im fünften, die andere erst im sechsten Buche giebt. Denn Euklid hätte, wenn es ihm angebracht erschienen wäre, beide dem ersten Buche vorausschicken können.

IX. Mittelst dieser Hilfssätze beweise ich nun auf folgende Art den eigentlichen Satz, der so lautet:

Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, und sind die inneren Winkel an derselben Seite zusammen kleiner als zwei Rechte, so treffen die Geraden, ins Unendliche verlängert, einander auf der Seite, wo jene beiden Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Es seien AB und CD die beiden Geraden, die von der unbegrenzten Geraden ACF getroffen werden und mit ihr an derselben Seite innere Winkel BAC und DCA bilden, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. Ich behaupte, daſs jene beiden Geraden AB und CD , ins Unendliche verlängert, einander treffen, und zwar auf der Seite der Geraden AF , wo sich jene beiden Winkel befinden.

Man denke sich nämlich die Gerade AC , die zwischen ihnen auf der unbegrenzten Geraden ACF liegt, auf dieser geradlinig bewegt. Die Gerade AB , die auf AC steht, mache die Bewegung ohne Änderung des Winkels BAC mit, bis $\alpha\beta$, das heisst, die bewegte Gerade AB , die Gerade CD (nach Hilfssatz 7) in einem Punkte π schneidet. Alsdann ist $\pi C\alpha$ ein Dreieck, und es giebt (nach Hilfssatz 8) ähnliche Dreiecke von jeder beliebigen Gröſse. Man kann daher über der Geraden CA ein Dreieck zeichnen, das dem Dreieck $\pi C\alpha$ mit der Grundlinie $C\alpha$ ähnlich ist. Man denke sich das ausgeführt, und es sei PCA dieses Dreieck.

Hier darf man nicht einwenden, daſs Euklid noch nicht gelehrt habe, wie man über einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck zeichnet,

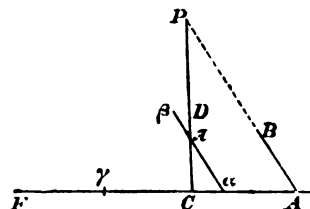


Fig. 7.

das einem gegebenen ähnlich ist*). Denn vielfach setzt man bei der Vorbereitung**) zum Beweise von Lehrsätzen (bei der Lösung von Aufgaben durch Konstruktion ist es freilich weniger am Platze) Dinge als ausführbar und ausgeführt voraus, deren geometrische Ausführbarkeit noch nicht gelehrt wird, zum Beispiel die beiden mittleren Proportionalen von zwei Geraden, ebenso die dem Kreisumfange gleiche Gerade und unzählig vieles andere. Und doch gelingen die Beweise der Lehrsätze nicht schlechter, als wenn die geometrische Konstruktion völlig bekannt wäre. Und wenn jemand die Gleichheit des arktischen Kreises mit dem antarktischen dadurch begründete, daß sie zur Deckung gebracht werden können, da ja, wenn man den Mittelpunkt auf den Mittelpunkt und die Ebene auf die Ebene legt, der Umfang mit dem Umfang (wegen der Gleichheit der Halbmesser) und der Kreis mit dem Kreise zur Deckung gelangt, so hat niemand ein Recht diesen Beweis als unerlaubt zurückzuweisen, weil es doch geometrisch nicht ersichtlich ist, wie jemand den antarktischen Kreis an den arktischen anlegen könne. Es genügt, wenn diese Kreise so beschaffen sind, daß sie, falls man sie aneinanderlegt, notwendig zur Deckung gelangen.

Ebenso gut gelingt hier der Beweis, sobald nur feststeht, daß man das ausführen kann, was hier als ausgeführt gedacht wird, nämlich das Dreieck PCA zu zeichnen. Wir fahren in dem Beweise fort.

Da also PCA ein Dreieck ist, so treffen (nach der Erklärung des Dreiecks) die beiden Geraden CP und AP einander im Punkte P , und da das Dreieck PCA dem Dreieck $\pi C\alpha$ (nach Konstruktion) ähnlich ist, so sind die einzelnen Winkel den einzelnen Winkeln der Reihe nach gleich (nach der Erklärung ähnlicher geradliniger Figuren). Mithin ist der Winkel PCA dem Winkel $\pi C\alpha$, das heißt dem Winkel DCA gleich, und es liegt daher die Gerade CP in der Verlängerung der Geraden CD . Läge nämlich die Gerade CD jenseits oder diesseits, so wäre der Winkel PCA größer oder kleiner als der Winkel DCA , während doch ihre Gleichheit bewiesen wurde.

Ebenso ist der Winkel PAC gleich dem Winkel $\pi\alpha C$. Demselben Winkel $\pi\alpha C$, das heißt dem Winkel $\beta\alpha F$, ist aber der Winkel BAF oder BAC gleich (nach Hilfssatz 3 und 4), und daher ist auch der Winkel BAC gleich dem Winkel PAC . Mithin liegt die Gerade AP in der Verlängerung der Geraden AB (läge sie nämlich jenseits oder

*) [Was Wallis hier behauptet, ist nicht ganz richtig: merkwürdiger Weise findet sich in den Elementen nichts über die Konstruktion von Dreiecken, die einem gegebenen Dreieck ähnlich sind.]

**) [Im Original steht: in $\pi\alpha\sigma\sigma\epsilon\nu\eta$ ad demonstrationes theorematum.]

diesseits, so wären die Winkel BAC und PAC verschieden, deren Gleichheit bewiesen ist).

Demnach fällt die Gerade AP mit der Verlängerung von AB zusammen. Ebenso bilden CP und die Verlängerung von CD eine Gerade. Es treffen sich aber (wie schon gezeigt ist) AP und CP in dem Punkte P , also treffen sich auch die Verlängerungen von AB und CD , und zwar in eben diesem Punkte P , das heisst, auf der Seite der Geraden EAF , wo jene beiden Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. Was zu beweisen war.

Diesen Beweis habe ich nach den strengsten Regeln für das Beweisen durchgeführt, indem ich mir Euklid zum Vorbild genommen habe, damit auch ein strenger Richter mir nicht den Vorwurf machen kann, daß zum vollgültigen Beweise etwas fehle. Jedoch tadle ich ganz und gar nicht, daß Euklid keinen Beweis gegeben hat, vielmehr würde ich sogar nichts dagegen haben, wenn er noch mehr unbewiesene Forderungen aufgestellt hätte, zum Beispiel, wenn er (mit Archimedes) gefordert hätte, daß die gerade Linie unter allen Linien zwischen denselben Endpunkten die kürzeste sei, (dabei hätte er dann nicht neunzehn Sätze vorzuschicken gebraucht, ehe er bewies, daß zwei Dreiecksseiten zusammengenommen grösser sind als die dritte) und anderes, was an und für sich einleuchtend ist.

Aber Euklid scheint die Absicht gehabt zu haben, auf Grund möglichst weniger Forderungen das Übrige durch die strengsten Schlüsse zu beweisen, und so kommt es, daß er sich nicht selten damit abquält, Dinge zu beweisen, die ihm jedermann ohne weiteres zugestehen wird. Bei jedem Beweise, und zwar in jedem Gebiete ohne Ausnahme, muß man etwas voraussetzen. Denn, ohne etwas vorauszusetzen (oder es vorher zuzugeben oder vorher zu beweisen), ist kein Beweis möglich. Freilich pflegen diese Voraussetzungen von anderen Schriftstellern (über andere Gegenstände) nicht ausdrücklich genannt zu werden (wie das Euklid gethan hat), sondern sie nehmen solche Voraus- 678
setzungen stillschweigend an, ohne es zu bemerken.

Auch bei Euklid selbst finden sich im Fortgange seines Werkes neben den ausdrücklich erwähnten Voraussetzungen (den wichtigsten und bemerkenswertesten) zuweilen noch andere, die entweder aus dem Anblicke der Figur oder anderswoher einleuchten, die aber niemand bestreiten wird. Eine solche Voraussetzung (die überall vorkommt) ist die, daß das Ganze genau dasselbe ist wie die Summe der Teile (woraus man schließt, daß, wenn sich zeigen läßt, etwas

sei gleich der Summe der Teile, es auch dem Ganzen gleich ist), ebenso, daß, was für die einzelnen Fälle als richtig bewiesen ist, allgemein richtig ist (zum Beispiel, was für das rechtwinklige, das spitzwinklige, und das stumpfwinklige Dreieck gilt, gilt für jedes geradlinige Dreieck, weil es eben keine anderen geradlinigen Dreiecke giebt), und ebenso, daß eins und eins zwei, und vier und eins fünf ist, und ähnliches, was ein aufmerksamer Leser ab und zu bemerken, was aber niemand tadeln wird, (nicht zu erwähnen, daß er bei der Erklärung der Kugel, des Kegels und des Cylinders die Bewegung der Ebene voraussetzt, die er weder erklärt noch gefordert hat). Aber auch wenn er noch mehr entweder stillschweigend vorausgesetzt oder ausdrücklich gefordert hätte, was an sich einleuchtend ist, darf man ihn deshalb nicht anklagen, also auch nicht, wenn er fordert, daß zwei (in derselben Ebene liegende) Gerade, die einander näher kommen, schließlicb zusammen-treffen sollen.

GIROLAMO SACCHERI

1667—1733.

In den Vorbemerkungen zu dem Versuche von Wallis hatten wir bereits erwähnt, daß im siebzehnten Jahrhundert auch in Italien das Interesse für die Grundlagen der Geometrie rege war, und zwar sind die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker damals hauptsächlich beschäftigten, die Lehre von den Proportionen und die Parallelen-theorie.

Für die Parallelen-theorie ist zunächst Borelli zu nennen, der allerdings durch seine Untersuchungen über die Bewegung der Lebewesen (*De motu animalium*, Rom 1680) bekannter ist. Er gab 1658 seinen *Euclides restitutus* heraus und kritisierte in einer Anmerkung (S. 37) Euklids Parallelen-theorie: er wirft ihr vor, daß der Begriff des Unendlichen hineingezogen werde, insofern Gerade als parallel erklärt werden, wenn sie, ins Unendliche verlängert, einander nicht schneiden. Borelli schlägt deshalb vor, gerade Linien dann parallel zu nennen, wenn sie ein gemeinsames Lot besitzen; das sei eine durchaus faßliche, dem menschlichen Geiste zugängliche Eigenschaft. Bald aber stellt sich heraus, daß diese Erklärung zum Beweise der fünften Forderung nicht ausreicht, und Borelli sieht sich genötigt, als neues Axiom das bereits bei Clavius angeführte zu Hilfe zu nehmen, das er nach dem Vorgange von Guldin so formuliert: Wird eine gerade Linie, die auf einer anderen senkrecht steht, in der Weise verschoben, daß der eine Endpunkt immer auf der Geraden verharret und der rechte Winkel in ihm erhalten bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt eine gerade Linie. Wir müssen daher sagen, daß er die von ihm hervorgehobene Schwierigkeit im Grunde nur umgangen hat.

In den meisten Lehrbüchern der Elementargeometrie vom sechzehnten bis zum Anfange des achtzehnten Jahrhunderts werden — was ja sehr bequem ist — parallele Gerade sofort als äquidistante erklärt. Der erste, der erkannte, daß diese Erklärung nur dann zulässig ist, wenn man das Vorhandensein solcher Geraden erweisen kann, scheint Giordano da Bitonto (1680) gewesen zu sein. In den Endpunkten einer Grundlinie denkt er sich Lote von gleicher Länge errichtet und sucht zu beweisen, daß die Verbindungsgerade

der Endpunkte dieser Lote von der Grundlinie überall denselben Abstand hat. Zu diesem Zwecke stellt er eine etwas verwickelte Betrachtung an, aus der hervorgehen soll, daß die Lote, die man von den Punkten irgend einer krummen Linie auf die Grundlinie fallen kann, nicht alle gleich sein können. Die Unzulänglichkeit seines Schlußverfahrens hat bereits Klügel in zutreffender Weise dargethan. Bemerkenswert erscheint noch, daß wir bei diesem Beweise Giordanos der Figur wieder begegnen, die wir schon bei Clavius fanden, und die wir abermals bei Saccheri finden werden.

Zu diesem merkwürdigen Manne wenden wir uns jetzt und berichten zunächst über sein Leben und seine Person. Wir sind dabei in der glücklichen Lage, Aufzeichnungen benutzen zu können, die der Jesuitenpater Fr. Gambarana über seinen Ordensbruder gemacht hat, mit dem zusammen er 35 Jahre lang in Pavia gewirkt hatte. Bei dieser Gelegenheit wollen wir auch dem Direktor der Biblioteca Estense, Herrn Förti in Modena, nochmals unseren Dank dafür aussprechen, daß er uns eine Abschrift dieser als Codice Estense I. H. 10. (18 Seiten Folio) bezeichneten Handschrift hat zukommen lassen.

Girolamo Saccheri ist am 5. September 1667 in San Remo geboren, das damals zum Gebiete der Republik Genua gehörte; über seine Eltern wissen wir nichts. Am 24. März 1685 ward er in die Gesellschaft Jesu aufgenommen, und zwar geschah dies in Genua, wo er sich schon einige Jahre vorher aufgehalten zu haben scheint. Nach Beendigung des Noviziats wirkte er als Lehrer der Grammatik an dem von Jesuiten geleiteten Collegio di Brera in Mailand. Lehrer der Mathematik war daselbst Tommaso Ceva (1648—1737), ein Bruder des bekannten Mathematikers Giovanni Ceva; mit beiden Brüdern hat Saccheri in wissenschaftlichem Verkehr gestanden und von ihnen mannigfache Anregungen empfangen. Darauf war er eine Zeit lang Lehrer der Philosophie und der polemischen Theologie an dem Jesuitenkollegium zu Turin und kam endlich im Jahre 1697 an das Collegium zu Pavia. Dort hat er außerdem an der Universität Vorlesungen über Arithmetik, Algebra, Geometrie und andere Gegenstände der Mathematik gehalten. Die Herbstferien pflegte er in Mailand am Collegio di Brera zuzubringen, wo er auch nach langer Krankheit am 25. Oktober 1733 gestorben ist.

Saccheris Charakter schildert sein Biograph Gambarana mit folgenden Worten: „Er kümmerte sich nicht um seine Person, um Speise, um Kleidung, um Bequemlichkeit, nur die Wahrheit, das Wohl anderer, die Ehre und die Fortschritte des heiligen römischen Glaubens lagen ihm am Herzen.“

Mit besonderer Ausführlichkeit verweilt Gambarana bei einer Seite von Saccheris Begabung, die auf jeden, der ihn kennen lernte, besonderen Eindruck machen mußte, bei seiner ungewöhnlichen Gedächtniskraft und Combinationsgabe. Schon früh zeigte sich sein Rechengenie. Als Knabe von fünf Jahren löste er bereits schwierige Rechenaufgaben, die man ihm vorgelegt hatte. Später wurde er ein vorzüglicher Schachspieler, er spielte gleichzeitig drei Parteen ohne Ansicht des Brettes und siegte in der Regel. Während des Spiels konnte er sich mit andern unterhalten und sogar „über abstruse Probleme der Geometrie nachdenken“; nachher wiederholte er die Parteen aus dem Gedächtnis. Tommaso Ceva hat ihn in seiner *Philosophia Novo-antiqua*, Mailand 1704, mit den Versen besungen:

Scacchia qui triplici certamine versat eodem
Tempore, summotus ludo procul omnia mente
Complexus memori.

Eine ebenso große Geschicklichkeit besaß Saccheri in der Kunst des Chiffernlesens, wovon Gambarana erstaunliche Proben mittheilt.

Auf Saccheris theologische Schriften einzugehen, ist hier nicht der Ort. Ehe wir von den mathematischen sprechen, wollen wir erwähnen, daß er, nach Gambarana, im Jahre 1692 in Turin eine Abhandlung über Logik veröffentlichte, deren Titel: *Logica demonstrativa* war. Indes ist eine solche Schrift weder in Backers *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus*, noch in Riccardis *Biblioteca matematica italiana* angeführt. Dort findet sich vielmehr ein Werk: *Logica demonstrativa theologicis, philosophicis et mathematicis disciplinis accommodata*, auctore R. P. Hieronymo Saccherio Societatis Jesu. Ticini Regii 1701, 8°, sowie ein Nachdruck: *Augustae Ubiorum* 1735, 8°, 162 Seiten. Genauerer über dieses Werk, auf das sich Saccheri bei seinen Untersuchungen über die Parallelen theorie beruft, können wir leider nicht mittheilen.

Dagegen haben wir die drei mathematischen Schriften Saccheris sämtlich eingesehen. Die königlichen Bibliotheken in Berlin und in München besitzen sein Erstlingswerk:

Quaesita geometrica a Comite Ruggerio de Viginti Milliis omnibus proposita, ab Hieronymo Saccherio Genuensi Societatis Jesu soluta. Mediolani 1693, 4°, 37 Seiten, von dem Riccardi eine zweite Ausgabe erwähnt:

Sphinx geometra seu quaesita geometrica proposita et soluta rursus prodeunt auspiciis Serenissimi Principis Francisci Farnese, Parma 1694. 4°.

Es handelt sich in diesem Werke um sechs geometrische Aufgaben, die Graf Roger Ventimiglia aus Palermo (1670—1698) im April 1692 in dem *Diarium Parmense* gestellt hatte, und die hauptsächlich Kegelschnitte betreffen. Bei der Lösung dieser Aufgaben bedient sich Saccheri, der recht beträchtliche geometrische Kenntnisse zeigt, der geistreichen Methoden, die Giovanni Ceva in seinem Werke: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, Mailand 1678, entwickelt hatte, einem Werke, das als ein Vorläufer von Moebius' *Barycentrischem Calcul* bezeichnet werden darf. Die *Quaesita* werden erwähnt in dem *Traité analytique des sections coniques* von L'Hospital (Paris 1707, S. 259), wo der Père Saquerius als sehr bewandert in der Geometrie gerühmt wird.

Weniger günstig müssen wir über Saccheris zweite Schrift urteilen, die wir in den Universitätsbibliotheken zu Wien und zu München gefunden haben, und die den Titel führt:

Neostatica auctore Hieronymo Saccherio e Societate Jesu. Excellentissimo senatui Mediolanensi dicata. Mediolani 1708, 4^o. 168 Seiten.

Sie verdankt ihre Entstehung einem Gedanken, den Tommaso Ceva in seinem Buche: *De natura gravium*, Mailand 1699, ausgesprochen hatte, daß nämlich, wenn die Schwerkraft nach dem Erdmittelpunkt gerichtet sei, Galileis Fallgesetze nicht wahr sein könnten, die ja voraussetzen, daß die Schwerkraft überall dieselbe Richtung habe. Diesen Gedanken weiter verfolgend, untersucht Saccheri zunächst die Zusammensetzung von Kräften, die alle nach demselben Punkte gerichtet sind. Dann macht er, ebenfalls nach dem Vorgange Cevas, die Annahme, die Schwerkraft sei proportional dem Abstände vom Erdmittelpunkte und leitet den bereits in Newtons *Principien* 1687 (Lib. I, Sectio X, Propositio 47) angegebenen Satz her, daß bei einem solchen Gesetze der Anziehung die Wurfbahn immer eine Ellipse sein müsse.

Wir kommen endlich zu Saccheris Hauptwerk:

Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu.

Mediolani 1733, 4^o, XVI und 142 Seiten, mit 6 Figurentafeln. Sein Titel erinnert an Saviles Äußerung über die beiden Makel, die den wunderschönen Leib der Geometrie entstellen.

Die Druckerlaubnis der Inquisition ist am 13. Juli 1733, die des Provinzials der Gesellschaft Jesu am 16. August 1733 erteilt worden. Wir dürfen daher annehmen, daß Saccheri, der, wie Gambarana

berichtet, nach langer Krankheit am 25. Oktober 1733 starb, dieses Werk, das wohl die Arbeit eines Menschenlebens darstellt, noch vor seinem Tode gedruckt sehen wollte; ob er die Vollendung des Druckes erlebt hat, erscheint fraglich. Diese Umstände erklären es sehr gut, daß einige Beweise noch kleine Lücken zeigen, sowie auch, daß sich an einigen Stellen falsche Rückverweisungen auf frühere Sätze finden.

Das Werk besteht aus zwei Büchern, die an Umfang, wie an Wert, sehr ungleich sind. Das zweite, kürzere betrifft die Lehre von den Proportionen und braucht hier nicht berücksichtigt zu werden. Um so wichtiger ist das erste, das einen geistreichen Versuch enthält, die Euklidische Geometrie als die einzig mögliche nachzuweisen.

Saccheri hat das unvergängliche Verdienst, dem Probleme der Parallellinien eine ganz neue Seite abgewonnen zu haben. Die Versuche, die wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben, beruhten auf dem gemeinschaftlichen Grundgedanken, daß man die fünfte Forderung unmittelbar aus den anderen Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie herleiten wollte. Alle diese Versuche litten an dem wesentlichen Mangel, daß bei ihnen, mehr oder weniger offen, ein neues Axiom an Stelle des zu beweisenden eingeführt wurde.

Saccheri giebt nun der Frage die neue Wendung: Wäre die fünfte Forderung keine Folge der übrigen Voraussetzungen Euklids, so könnten bei einem Viereck $ABDC$, das in A und B rechte Winkel hat und wo $AC = BD$ ist, die Winkel bei C und D spitz oder stumpf sein. Macht man eine dieser beiden Annahmen, die er als die Hypothese des spitzen bez. des stumpfen Winkels bezeichnet, so lassen sich aus ihr weitere geometrische Folgerungen ziehen. Um die Wahrheit der fünften Forderung nachzuweisen, an der Saccheri nicht gezweifelt zu haben scheint, muß man also zeigen, daß jede dieser Annahmen schließlich zu einem Widerspruch führt. Einen solchen Widerspruch zu finden, gelingt Saccheri bei der Hypothese des stumpfen Winkels ohne Schwierigkeit, jedoch bei der Hypothese des spitzen Winkels erst, wie er sich ausdrückt, nach einem langwierigen Kampfe. Er sieht sich dabei genötigt, die Folgerungen ziemlich weit zu treiben, und gelangt so zu einer Reihe von Sätzen, die man gewöhnlich teils Legendre, teils den Begründern der nichteuklidischen Geometrie Lobatschefskij und Bolyai zuschreibt.

Legendre, dessen Untersuchungen über die Parallelentheorie in die Zeit von 1794—1833 fallen, hat unter ausschließlicher Benutzung der ersten achtundzwanzig Sätze des ersten Buches der Elemente bewiesen, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als zwei Rechte, und daß sie gleich zwei Rechten sein muß,

sobald das für irgend ein Dreieck der Fall ist. Beide Sätze finden sich schon bei Saccheri, der nicht nur die Hypothese des stumpfen Winkels widerlegt, sondern auch eine ganze Reihe von Sätzen entwickelt hat, in denen Kennzeichen zur Unterscheidung der Hypothese des rechten Winkels von den beiden anderen Hypothesen aufgestellt werden; eins dieser Kennzeichen ist das von Legendre wieder-gefundene.

Weiter aber hat Saccheri bei der Hypothese des spitzen Winkels das Verhalten zweier sich nicht schneidender Geraden eingehend untersucht und das Vorhandensein des gemeinsamen Lotes und der Grenzlinien in aller Strenge nachgewiesen. Er hat auch schon den Ort der Punkte betrachtet, die von einer Geraden gleich weit entfernt sind, und ist so zu den Oricyclen von Lobatschewskij gelangt.

Hervorzuheben ist noch, daß Saccheris Beweise für diese Sätze sehr klar und elegant sind, während später, wo es gilt, die angeblichen Widersprüche zu finden, seine Darstellung mühsam und weit-schweifig wird.

Fragt man nun, wie Saccheri zu dieser Problemstellung gelangt ist, so läßt sich wenigstens zweierlei feststellen: Einmal betont er immer wieder und wieder, daß es unzulässig sei, parallele Gerade als äquidistante zu erklären, daß vielmehr das Vorhandensein solcher äquidistanter Geraden durchaus eines Beweises bedürfe; dies hatte — wie wir wissen — schon Giordano da Bitonto erkannt, dessen Werk indes Saccheri entgangen zu sein scheint. Dann aber ist Borellis Erklärung der Parallelen als solcher Geraden, die ein gemeinschaftliches Lot besitzen, auf Saccheris Gedankengang von Einfluß gewesen. Will man nämlich, von dieser Erklärung ausgehend, die Sätze der Euklidischen Geometrie herleiten, so kommt alles darauf an, zu zeigen, daß der Abstand jener beiden Geraden an einer beliebigen Stelle dem gemeinsamen Lote gleich ist, und hierdurch wird man gerade auf die schon vorhin erwähnte Figur geführt, die den Ausgangspunkt von Saccheris Untersuchungen bildet.

Der *Euclides ab omni naevo vindicatus* scheint ein ziemlich verbreitetes Buch gewesen zu sein. In Deutschland haben wir sein Vorhandensein auf den Königlichen Bibliotheken zu Berlin und Dresden und auf den Universitätsbibliotheken in Göttingen (seit 1770), Halle, Rostock und Tübingen festgestellt. Auch findet man das Werk im achtzehnten Jahrhundert wiederholt erwähnt. So erschien, um nur das Wichtigste anzuführen, im Jahre 1736 eine Anzeige in den *Acta Eruditorum* (S. 277), die jedoch auf den Inhalt nur oberflächlich eingeht,

im Jahre 1742 finden wir es in Heilbronners *Historia mathematicae* (S. 162) unter den Schriften über Euklids *Elemente* erwähnt, 1758 nennt es Montucla, als er vom Parallelenaxiom spricht, im ersten Bande der *Histoire des mathématiques* (2. Aufl. S. 209), und endlich 1763 wird dieses „sonderbare Buch“ von Klügel in seiner Dissertation über die Geschichte der Parallelentheorie eingehend besprochen. Klügel erkennt die Sorgfalt und den Scharfsinn Saccheris an. Jedoch haben sie, so urteilt er sehr richtig, nicht zum Ziele geführt, denn die Widersprüche, zu denen Saccheri gelangt, beruhen teils auf einem unzulässigen Gebrauch des Unendlichen, teils sind sie auf unrichtige Vorstellungen über die Erzeugung von Curven durch die Bewegung eines Punktes zurückzuführen.

Auch später ist Saccheris Werk nicht ganz in Vergessenheit geraten; wir finden es erwähnt in C. F. A. Jacobis Dissertation 1824, in Camerers Euklidausgabe 1824, und in den Gymnasialprogrammen von Thiermann 1862 und Maier 1875. Auch hier wird Saccheris „große Sorgfalt und erfinderischer Scharfsinn“ gepriesen, indessen vermissen wir überall ein genaueres Eingehen auf das Wesen der Sache. Erst Beltrami hat im Jahre 1889 nachdrücklich hervorgehoben, daß wir in Saccheri einen Vorläufer Lobatschefskijs zu sehen haben, und hat dadurch auch in weiteren Kreisen den Namen seines Landmannes bekannt gemacht.

Beltrami hatte damals mitgeteilt, daß der Jesuitenpater Manganozzi eine neue Ausgabe des *Euclides ab omni naevo vindicatus* vorbereite; diese Absicht ist jedoch bis jetzt nicht zur Ausführung gekommen. Eine englische Übersetzung des ersten Buches hat George Bruce Halsted im *American Mathematical Monthly* begonnen, und es sind von Juni bis December 1894 die ersten dreizehn Lehrsätze erschienen. Wir haben uns bei unsrer Übersetzung möglichst eng an das Original gehalten und sind ihm auch da gefolgt, wo es möglich gewesen wäre, durch den Gebrauch moderner Ausdrücke eine kürzere und vielleicht auch leichter verständliche Fassung zu erzielen, denn nur so glaubten wir dem historischen Standpunkte unsers Buches gerecht zu werden.

Litteratur.

- Backer, Augustin et Alois de, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus*. 4^{ème} série. Liège 1858. S. 650.
- Beltrami, *Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewsky*. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno 1889. Serie 4. Vol. V. S. 441—448.
- Borelli, *Euclides restitutus sive prisca geometriae elementa brevius et facilius contexta*. Pisa 1658.
- Camerer, *Euclidis elementa graece et latine*, commentariis instructa, ed. Camerer et Hauber. Berlin 1824. Bd. 1. S. 423.
- Cantor, M., *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Bd. 2. 1892. S. 607; Bd. 3. 1894. S. 13 und 18.
- Ceva, Thomas, *Philosophia Novo-antiqua*, Mailand 1704. 2. Ausgabe, Venedig 1732: Dissertatio I, S. 24.
- Ferrari, Guido, *Opusculorum Collectio*, Lugani 1777, S. 82, 99 und 101.
- Giordano da Bitonto, *Euclide restituito ovvero gli antichi elementi geometrici restaurati e facilitati*, Rom 1680. Fol. Zweite Ausgabe 1686.
- Guldin, *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ*. Lib. IV. Wien 1641. S. 350.
- Halsted, George Bruce, *Non Euclidean Geometry, historical and expository*. The American Mathematical Monthly, Kidder (Missouri) 1894, S. 70—72, 112—115, 149—152, 188—191, 222—223, 259—260, 301—303, 345—346, 378—379, 421—423.
- Jacobi, C. F. A., *De undecimo Euclidis axioma iudicium*. Dissertation. Jena 1824.
- KlÜgel, *Conatum praecipuorum theorum parallelarum stabiliendi recensio*. Dissertation. Göttingen 1763.
- Lombardi, *Storia della letteratura italiana nel secolo XVIII*. Tomo I. Modena 1827. S. 352.
- Maier, *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid*. Programm. Tübingen 1875.
- Mansion, *Analyse des Recherches du P. Saccheri, S. J., sur le Postulatum d'Euclide*. Annales de la Société scientifique de Bruxelles. 1890. Part. I. S. 43.
- Riccardi, *Biblioteca matematica italiana*. Parte prima. Vol. I. Modena 1870. Vol. II. 1876. Appendice, Ser. I—VI. 1878—1893.
- Thiermann, *Geometrische Abhandlung über Erklärungen, Forderungen und Grundsätze nebst einer elementaren Begründung der Lehre von den Parallellinien*. Programm. Göttingen 1862. S. 40—56.
- Verci, Giambattista, *Lettere alla nobile Signora Contessa Francesca Roberti Franco sopra il giuoco degli scacchi*. Venezia 1778. Dieses Buch, das wir nicht gesehen haben, enthält nach Anton Schmid, Literatur des Schachspiels, Wien 1847, S. 299 eine Abhandlung über das Schachspiel und verschiedene Erzählungen. Verci vergleicht den P. Saccheri von S. Remo mit Julius Caesar, der zu gleicher Zeit Audienz erteilte, Briefe las und seinen Schreibern Briefe vorsagte.
- Veronese, *Fondamenti di geometria*, Padua 1891, deutsch von Schepp unter dem Titel: *Grundzüge der Geometrie u. s. w.*, Leipzig 1894, S. 636 f.

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR

Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU

In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.

OPUSCULUM
EX^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI

Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permiſſu.*

viele ausgezeichnete Geometer der folgenden Zeiten sich dieselbe Aufgabe gestellt und eine neue Erklärung der Parallelen für notwendig befunden haben. Während also Euklid parallele Gerade als solche erklärt, die in derselben Ebene liegen und, wenn sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert werden, einander niemals treffen, so setzen sie an Stelle der letzten Worte der eben angeführten Erklärung diese anderen: die immer gleiche Entfernung von einander haben, sodaß nämlich alle Lote, die von beliebigen Punkten der einen auf die andere gefällt werden, immer einander gleich sind.

Hieraus aber entspringt ein neuer Zwiespalt. Einige nämlich, und zwar die scharfsinnigeren, suchen das Vorhandensein der so erklärten Parallellinien zu beweisen und schreiten von da aus zum Beweise jenes Axioms, das, so wie es Euklid ausspricht, strittig ist; denn auf ihm beruht ja von jenem neunundzwanzigsten Satze des ersten Euklidischen Buches an (mit sehr wenigen Ausnahmen) die ganze Geometrie.

Andere aber nehmen (nicht ohne einen groben Verstofs gegen die strenge Logik) parallele Geraden dieser Art, nämlich gleich weit von einander entfernte, von vorn herein als gegeben an, um von da aus zum Beweise der anderen Sätze überzugehen.

Dies genüge, um den Leser auf das vorzubereiten, was den Gegenstand des ersten Buches meiner Abhandlung bilden wird, denn eine ausführlichere Erklärung alles eben Gesagten wird in den Anmerkungen hinter dem Lehrsatz XXI dieses Buches gegeben werden.

Ich theile dieses Buch in zwei Teile. In dem ersten werde ich jenen älteren Geometern folgen und mich demnach nicht um die Natur oder den Namen derjenigen Linie bekümmern, die in allen ihren Punkten von einer angenommenen geraden Linie gleich weit entfernt ist. Ich werde vielmehr bloß darauf ausgehen, das strittige Euklidische Axiom ohne jeden Zirkelschlufs klar zu beweisen. Daher werde ich von den früheren Sätzen des ersten Euklidischen Buches weder den siebenundzwanzigsten noch den achtundzwanzigsten jemals benutzen, ja nicht einmal den sechzehnten oder siebzehnten, außer wo es sich deutlich um ein auf allen Seiten begrenztes Dreieck XI handelt. Dann werde ich in dem zweiten Teile, um eine neue Bestätigung desselben Axioms zu geben, beweisen, daß die Linie, die in allen ihren Punkten von einer angenommenen geraden Linie gleichweit entfernt ist, nur eine gerade Linie sein kann. Daß aber bei dieser Gelegenheit die ersten Grundsätze der Geometrie einer strengen Prüfung zu unterwerfen sein werden, sieht jedermann ein.

Ich gehe zu den beiden anderen Makeln über, die man Euklid vorgeworfen hat. Der erste bezieht sich auf die sechste Erklärung des fünften Buches über proportionale Größen, der zweite auf die fünfte Erklärung des sechsten Buches über die Zusammensetzung von Verhältnissen. Es wird das einzige Ziel meines zweiten Buches sein, die erwähnten Euklidischen Erklärungen eingehend zu erörtern und zugleich zu zeigen, daß Euklids Ruhm hier mit Unrecht angegriffen worden ist.

Es ist indes nützlich, noch zu bemerken, daß ich bei dieser Gelegenheit ein gewisses Axiom beweisen werde, das in der ganzen Geometrie mit Sicherheit angewendet werden kann, ohne daß ich jener Forderung bedarf, die, wie mir scheint, von Erklärern unter dem Namen eines Axioms eingeschoben worden ist, und deren Gebrauch vom achtzehnten Satze des fünften Buches an beginnt.

XII

Von S. 1 an.

Von S. 5 an.

Von S. 10 an.

XIII

Von S. 20 an.

Von S. 23 an.

6. Hier kommen vier wichtige Anmerkungen hinzu. In der letzten wird eine gewisse geometrische Figur erklärt, an die Euklid vielleicht gedacht hat, um sein Axiom als an und für sich einleuchtend hinzustellen. In den drei vorhergehenden wird nachgewiesen, daß die früheren Versuche ausgezeichneter Geometer ihr Ziel nicht erreicht haben. Weil aber das strittige Axiom ganz streng bewiesen werden kann, wenn man von vornherein voraussetzt, daß es zwei gerade Linien giebt, die gleiche Entfernung von einander haben, so macht der Verfasser dort darauf aufmerksam, daß eine solche Voraussetzung einen offenbaren Zirkelschluss enthält. Und wenn man sich hier auf die allgemein verbreitete Überzeugung und auf die Gewissheit der Erfahrung berufen will, so macht er wiederum darauf aufmerksam, daß man sich nicht auf Versuche berufen darf, die unendlich viele Punkte betreffen, da ein Versuch in Bezug auf irgend einen Punkt genügen kann. An dieser Stelle bringt er drei eigene, unwiderlegliche physikalisch-geometrische Beweismethoden. Von S. 29 an.

7. Es bleiben bis zum Ende des ersten Theiles dieses Buches noch XIV zwölf Lehrsätze übrig. Die einzelnen Behauptungen gebe ich nicht an, weil sie zu verwickelt sind, sondern sage nur, daß dort endlich die widerspenstige Hypothese des spitzen Winkels einer offenbaren Unrichtigkeit überführt wird, weil sie nämlich zwei gerade Linien zulassen müßte, die in einem und demselben Punkte in derselben Ebene ein gemeinsames Lot hätten. Daß dies der Natur der geraden Linie widerstreitet, wird auf Grund von fünf Hilfssätzen bewiesen, in denen die fünf hauptsächlichsten Axiome der Geometrie enthalten sind, die sich auf die gerade Linie und den Kreis beziehen, nebst den zugehörigen Forderungen. Von S. 43 an.

8. Der zweite Teil enthält sechs Lehrsätze. In ihm wird (bei der Hypothese des spitzen Winkels) die Beschaffenheit der Linie untersucht, die in allen ihren Punkten von einer angenommenen geraden Linie die gleiche Entfernung hat. Es wird auf viele Arten gezeigt, daß sie der gegenüberliegenden Grundlinie gleich ist, woraus sich mit vollständiger Sicherheit die Unrichtigkeit der erwähnten Hypothese ergibt. Deshalb wird endlich in dem letzten Lehrsätze XXXIX vollkommen streng jenes berühmte Euklidische Axiom bewiesen, auf dem ja (wie jedermann weiß) die ganze Geometrie beruht. Von S. 87 an (bis S. 101).

.

[Nunmehr folgt der Inhalt des zweiten Buches, das hier nicht in Betracht kommt. Auf S. XVI befindet sich noch ein Druckfehlerverzeichnis.]

Euklid

von jedem Makel befreiet.

Erstes Buch,

worin bewiesen wird:

Werden zwei gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, von einer dritten geschnitten, und sind die von dieser auf derselben Seite gebildeten inneren Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte, so treffen die beiden Linien, ins Unendliche verlängert, schliesslich auf dieser Seite zusammen.

Erster Teil.

Lehrsatz I. Wenn zwei gleiche gerade Linien (Fig. 1) AC und BD mit der Geraden AB auf derselben Seite gleiche Winkel bilden, so behaupte ich, daß die Winkel an der Verbindungslinie CD einander gleich sind.

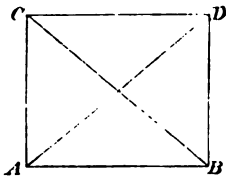


Fig. 1.

Beweis. Man ziehe AD und CB und betrachte die Dreiecke CAB und DBA . Ihre Grundlinien CB und AD sind (nach I. 4*) sicher gleich. Darauf betrachte man die Dreiecke ACD und BDC . Die Winkel ACD und BDC sind (nach I. 8) sicher gleich. Was zu beweisen war.

Lehrsatz II. Hat man ein solches Viereck $ABDC$ und halbiert die Seiten AB und CD (Fig. 2) in den Punkten M und H , so behaupte ich, daß die Winkel an der Verbindungslinie MH auf beiden Seiten rechte sind.

*) [I. 4 bedeutet: Satz 4 des ersten Buches der Euklidischen Elemente.]

Beweis. Man ziehe AH und BH , sowie CM und DM . Da in dem Viereck die Winkel A und B gleich sein sollen, und da ebenso (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Winkel C und D gleich sind, so folgt aus I. 4 (da die Gleichheit der Seiten schon bekannt ist), daß in den Dreiecken CAM und DBM die Grundlinien CM und DM gleich sind, und ebenso in den Dreiecken ACH und BDH die Grundlinien AH und BH . Vergleicht man daher die Dreiecke CHM und DHM und ebenso die Dreiecke AMH und BMH mit einander, so ergibt sich (aus I. 8), daß die Winkel zu beiden Seiten der Punkte M und H einander gleich und daher rechte sind. Was zu beweisen war.

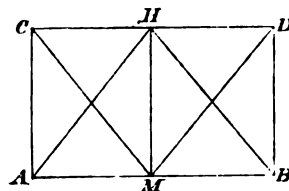


Fig. 2.

Lehrsatz III. Wenn zwei gleiche gerade Linien AC und BD (Fig. 3) auf irgend einer Geraden AB senkrecht stehen, so behaupte ich, daß die Verbindungslinie CD entweder gleich AB oder kleiner oder größer ist, je nachdem die Winkel an CD rechte oder stumpfe oder spitze sind.

Beweis des ersten Teiles. Sind die beiden Winkel C und D rechte, so sei, wenn das überhaupt möglich ist, die eine der beiden Geraden, etwa DC , größer als die andere BA . Man nehme auf DC das Stück DK gleich BA an und ziehe AK . Da nun die gleich langen Geraden BA und DK auf BD senkrecht stehen, so sind (nach Lehrsatz I) die Winkel BAK und DKA gleich. Das ist aber widersinnig, da nach der Konstruktion der Winkel BAK kleiner ist als der Winkel BAC , der als rechter vorausgesetzt wurde, und da der Winkel DKA nach der Konstruktion Außenwinkel und somit (nach I. 16) größer ist, als der innere gegenüberliegende Winkel DCA , der ein Rechter sein sollte. Mithin ist keine der genannten Geraden DC und BA größer als die andere, sobald die Winkel an der Verbindungslinie CD rechte sind, und daher sind sie einander gleich. Was an erster Stelle zu beweisen war.

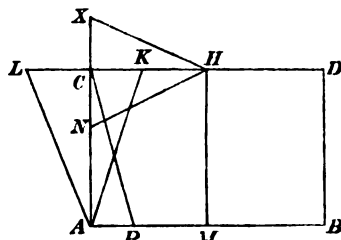


Fig. 3.

Beweis des zweiten Teiles. Wenn aber die Winkel an der Verbindungslinie CD stumpf sind, so halbiere man AB und CD in den Punkten M und H und ziehe MH . Da nun (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die beiden Geraden AM und CH auf der Geraden MH

oder größer, jenachdem die Winkel an CD rechte oder stumpfe oder spitze sind. Was zu beweisen war.

Zusatz I. Enthält daher ein Viereck drei rechte Winkel und einen stumpfen oder spitzen, so ist in ihm jede dem nicht rechten Winkel anliegende Seite kleiner als die gegenüberliegende, wenn der Winkel stumpf ist, wenn er aber spitz ist, größer. Denn für die Seite CH , im Vergleich zu der gegenüberliegenden Seite AM , ist das schon bewiesen, und auf ähnliche Art zeigt man es von der Seite AC , im Vergleich zu der gegenüberliegenden Seite MH .

Da nämlich die Geraden AC und MH auf AM senkrecht stehen, so können sie wegen der Ungleichheit der Winkel an der Verbindungslinie CH (nach Lehrsatz I) nicht gleich sein. Es kann aber auch nicht (bei der Annahme eines stumpfen Winkels in C) ein Stück AN von AC gleich MH sein, indem nämlich AC größer wäre, als diese Gerade, denn sonst wären die Winkel an der Verbindungslinie HN (wieder nach Lehrsatz I) gleich, was widersinnig ist, wie vorhin.

Nähme man aber wiederum an (wenn der Winkel im Punkte C spitz ist), daß eine auf der Verlängerung von AC gewählte Gerade AX gleich MH wäre, indem nämlich AC kleiner wäre als diese Gerade, so wären aus demselben Grunde die Winkel an HX gleich, was, ebenso wie vorhin, ganz widersinnig ist.

Daher bleibt nur übrig, daß bei der Annahme eines stumpfen Winkels im Punkte C die Seite AC kleiner ist als die gegenüberliegende Seite MH , bei der Annahme eines spitzen Winkels aber größer. Was behauptet war.

Zusatz II. Noch viel größer aber ist CH als irgend ein Stück von AM , zum Beispiel als PM , wenn nämlich die Verbindungslinie CP mit CH auf der Seite des Punktes H einen noch spitzeren Winkel und mit PM auf der Seite des Punktes M (wegen I. 16) einen stumpfen Winkel bildet*).

Zusatz III. Alles dies gilt ferner nicht bloß, wenn wir den angenommenen Loten AC und BD eine bestimmte Länge beilegen, sondern auch, wenn sie unendlich klein sind oder als unendlich klein

*) [Dieser Zusatz II des Lehrsatzes III wird später mehrfach benutzt und zwar in der Bedeutung, daß bei jedem Viereck $HCPM$, bei dem die Winkel in H und M rechte sind, während in C ein spitzer, in P ein stumpfer Winkel vorhanden ist, PM kleiner als CH sein muß. Aus der Fassung des Zusatzes ist das nicht ohne Weiteres klar, aber der Beweis des dritten Teiles läßt sich in der That auf jedes derartige Viereck $HCPM$ anwenden.

vorausgesetzt werden. Es ist zweckmüßig, sich das bei den folgenden Lehrsätzen zu merken.

Lehrsatz IV. *Umgekehrt aber sind (in derselben Figur, wie bei dem vorhergehenden Lehrsatz) die Winkel an der Verbindungslinie CD rechte oder stumpfe oder spitze, je nachdem die Gerade CD gleich der gegenüberliegenden AB ist oder kleiner oder größer.*

Beweis. Wenn nämlich die Gerade CD der gegenüberliegenden AB gleich ist, und nichtsdestoweniger die Winkel an ihr stumpf oder spitz sind, so beweisen gerade diese Winkel (nach dem vorhergehenden Lehrsatz), daß sie der Gegenseite AB nicht gleich ist, sondern kleiner oder größer, was gegen die Annahme verstößt.

Dasselbe gilt in gleicher Weise für die übrigen Fälle.

Die Winkel an der Verbindungslinie CD sind demnach sicher rechte oder stumpfe oder spitze, jenachdem die Gerade CD der gegenüberliegenden AB gleich ist oder kleiner oder größer. Was zu beweisen war.

Erklärungen. Weil (nach Lehrsatz I) die Verbindungsgerade zwischen den Endpunkten gleicher Senkrechten, die auf derselben Geraden errichtet sind (wir werden diese letztere *Grundlinie* nennen), gleiche Winkel mit diesen Loten bildet, so sind infolgedessen drei Hypothesen je nach der Art dieser Winkel zu unterscheiden. Und zwar werde ich die erste die *Hypothese des rechten Winkels* nennen, die zweite und die dritte aber die *Hypothese des stumpfen Winkels* und die *Hypothese des spitzen Winkels*.

Lehrsatz V. *Wenn die Hypothese des rechten Winkels auch nur in einem Falle richtig ist, so ist sie immer in jedem Falle allein die richtige.*

Beweis. Die Verbindungslinie CD (Fig. 4) bilde rechte Winkel mit irgend zwei gleichen Senkrechten AC und BD , die auf irgend einer Geraden AB errichtet sind. Dann ist (nach Lehrsatz III) CD gleich AB . Man nehme nun auf den Verlängerungen von AC und BD zwei Stücke CR und DX , die gleich AC und BD sind, und ziehe RX . Dann zeigt man leicht, daß die Verbindungslinie RX gleich AB ist, und die Winkel an ihr rechte sind. Einmal nämlich, indem man das

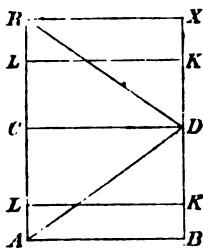


Fig. 4.

Viereck $ABDC$, unter Benutzung der gemeinsamen Grundlinie CD , auf das Viereck $CDXR$ legt. Eleganter aber verfährt man so.

Man ziehe AD und RD . Nun sind (nach I. 4) in den Dreiecken ACD und RCD die Grundlinien AD und RD und ebenso die Winkel CDA und CDR sicher gleich. Deshalb sind auch ihre Ergänzungen zu einem Rechten, ADB und RDX , gleich. Mithin ist wiederum (auch nach I. 4) in den Dreiecken ADB und RDX die Grundlinie AB gleich der Grundlinie RX . Folglich sind (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Winkel an der Verbindungslinie RX rechte, und wir kommen daher wieder auf die Hypothese des rechten Winkels*).

Da nun auf diese Weise, während die Grundlinie AB beibehalten wird, die Länge der Senkrechten bis ins Unendliche vermehrt werden kann**), ohne daß die Hypothese des rechten Winkels jemals zu bestehen aufhört, so muß noch bewiesen werden, daß diese Hypothese auch im Falle einer beliebigen Verkleinerung derselben Senkrechten immer gültig bleibt. Und das erhärtet man so.

Man nehme auf AR und BX zwei beliebige gleiche Senkrechte AL und BK und ziehe LK . Sind die Winkel an der Verbindungslinie LK keine rechten, so sind sie doch (nach Lehrsatz I) gleich. Sie sind also auf der einen Seite, etwa auf der von AB , stumpf und auf der von RX spitz, denn die Winkel zu beiden Seiten jedes dieser Punkte sind (nach I. 13) gleich zwei Rechten. Aber auch die auf RX senkrecht stehenden Geraden LR und KX sind sicher einander gleich. Also ist (nach Lehrsatz III) LK größer als die gegenüberliegende Seite RX und kleiner als die gegenüberliegende Seite AB .

Das ist aber widersinnig, denn es ist bewiesen, daß AB und RX gleich sind. Daher bleibt die Hypothese des rechten Winkels, wenn nur die einmal angenommene Grundlinie festgehalten wird, bei beliebiger Verkleinerung der Lote unverändert erhalten.

Aber die Hypothese des rechten Winkels bleibt auch dann unverändert erhalten, wenn man die Grundlinie irgendwie verkleinert oder vergrößert, denn es ist klar, daß man als Grundlinie jede der Senkrechten BK oder BX ansehen darf, und daß man entsprechend AB und die gleiche gegenüberliegende Gerade KL , oder auch XR , als Senkrechte ansehen darf.

Somit steht fest, daß die Hypothese des rechten Winkels, wenn sie auch nur in einem Falle richtig ist, immer in jedem Falle allein die richtige ist. Was zu beweisen war.

*) [Den zweiten Beweis bezeichnet *Saccheri* als eleganter, weil er streng Euklidisch ist. Aber auch bei ihm muß man eine Umklappung um die Grundlinie CD vornehmen, nämlich ACD auf RCD legen, sodafs die eigentliche Schwierigkeit in Wahrheit bestehen bleibt; vergl. auch die Anmerkung zu Euklid I. 4, S. 8.]

**) [Man beachte, daß hier die unendliche Länge der geraden Linie als etwas Selbstverständliches hingestellt wird. Vgl. die zweite Anmerkung zu S. 52.]

Lehrsatz VI. *Wenn die Hypothese des stumpfen Winkels auch nur in einem Falle richtig ist, so ist sie immer in jedem Falle allein die richtige.*

Beweis. Die Verbindungslinie CD (Fig. 5) bilde stumpfe Winkel mit irgend zwei gleichen Senkrechten AC und BD , die auf irgend einer Geraden AB errichtet sind. Dann ist (nach Lehrsatz III) CD kleiner als AB . Man verlängere AC und BD , nehme auf ihnen irgend zwei einander gleiche Stücke CR und DX an und ziehe RX . Jetzt untersuche ich die Winkel an der Verbindungslinie RX , die ja (nach Lehrsatz I) einander gleich sind.

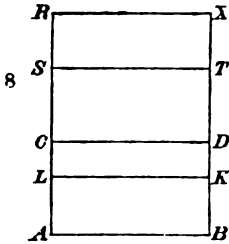


Fig. 5.

Wenn sie stumpf sind, haben wir unsre Behauptung. Sie sind jedoch auch keine Rechten, weil wir dann einen Fall der Hypothese des rechten Winkels hätten und also (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) für die Hypothese des stumpfen Winkels kein Platz übrig bliebe. Sie sind indes auch nicht spitz.

Dann wäre nämlich (nach Lehrsatz III) RX größer als AB und daher noch viel größer als CD . Dafs dies jedoch nicht eintreten kann, zeigt man so. Denkt man sich das Viereck $CDXR$ mit Geraden angefüllt, die von CR und DX gleiche Stücke abschneiden, so zieht dies nach sich, dafs man von der Geraden CD , die kleiner als AB ist, zu der größeren Geraden RX nur durch Vermittelung einer gewissen, AB gleichen Geraden ST übergehen kann*). Dafs hierin aber bei dieser Hypothese ein Widerspruch liegt, geht daraus hervor, dafs man alsdann (nach Lehrsatz IV) einen Fall für die Hypothese des rechten Winkels hätte, der (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) für die Hypothese des stumpfen Winkels keinen Platz übrig ließe. Mithin müssen die Winkel an der Verbindungslinie RX stumpf sein.

Nimmt man weiter auf AC und BD selbst gleiche Stücke AL und BK an, so läßt sich in ähnlicher Weise zeigen, dafs die Winkel an der Verbindungslinie LK auf der Seite von AB nicht spitz sein können. Sonst wäre nämlich diese Verbindungslinie größer als AB und daher noch viel größer als CD . Hieraus aber fände man, wie vorhin, eine Zwischenlinie zwischen CD , das kleiner, und LK , das größer als AB ist, eine Zwischenlinie sage ich, die gleich AB ist, und die ließe, wie schon bekannt, für die Hypothese des stumpfen Winkels überhaupt keinen Platz. Endlich können aus demselben

*) [Hierbei wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dafs die Länge der Geraden bei dem Übergange von CD nach RX sich stetig ändert. Die Behauptung ist jedoch, wie Lambert gezeigt hat, von dieser Voraussetzung unabhängig.]

Grunde die Winkel an der Verbindungslinie LK keine rechten sein. Folglich sind sie stumpf.

Wenn also auf derselben Grundlinie AB die Senkrechten beliebig vergrößert oder verkleinert werden, so bleibt stets die Hypothese des stumpfen Winkels erhalten.

Dasselbe muß aber auch gezeigt werden, wenn die Grundlinie beliebig angenommen wird. Zur Grundlinie wähle man (Fig. 6) irgend eine der genannten Senkrechten, zum Beispiel BX . Man halbiere AB und RX in den Punkten M und H und ziehe MH . Dann steht (nach Lehrsatz II) MH senkrecht auf AB und auf RX . Nun ist, nach unsrer Annahme, der Winkel beim Punkte B ein rechter, der beim Punkte X , wie schon bewiesen, ein stumpfer. Man mache also den Winkel BXP auf der Seite von MH gleich einem Rechten. Dann trifft XP die Gerade MH in einem gewissen Punkte P , der zwischen den Punkten M und H liegt, denn erstens ist der Winkel BXH stumpf, und zweitens ist, wenn noch XM gezogen wird, (nach I. 17) der Winkel BXM spitz. Weiter aber enthält das Viereck $XBMP$, wie schon bekannt, drei rechte Winkel und (nach I. 16) im Punkte P einen stumpfen, denn dieser ist Außenwinkel für den inneren, gegenüberliegenden rechten Winkel an der Ecke H des Dreiecks PHX . Mithin ist die Seite XP (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) kleiner als die gegenüberliegende Seite BM . Nimmt man daher auf BM ein Stück BF gleich XP an, so sind (nach Lehrsatz I) die Winkel an der Verbindungslinie PF einander gleich, und zwar stumpf, da der Winkel BFP (nach I. 16) stumpf ist wegen des inneren gegenüberliegenden rechten Winkels FMP . Mithin besteht für jede beliebige Grundlinie BX die Hypothese des stumpfen Winkels.

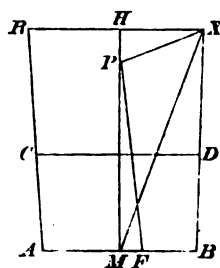


Fig. 6.

Es gilt aber, wie vorhin, dieselbe Hypothese auch, wenn unter Beibehaltung der Grundlinie BX die gleichen Senkrechten beliebig vergrößert oder verkleinert werden. Demnach steht fest, daß die Hypothese des stumpfen Winkels, wenn sie auch nur in einem Falle richtig ist, immer in jedem Falle allein die richtige ist. Was zu beweisen war.

Lehrsatz VII. Wenn die Hypothese des spitzen Winkels auch nur in einem Falle richtig ist, so ist sie immer in jedem Falle allein die richtige.

Der Beweis ist sehr leicht. Wäre nämlich mit der Hypothese des spitzen Winkels auch nur irgend ein Fall einer der beiden Hypo-

thesen des rechten oder des stumpfen Winkels verträglich, so bliebe
 10 (nach den beiden vorhergehenden Lehrsätzen) kein Platz für eben
 diese Hypothese des spitzen Winkels, was widersinnig ist. Wenn also
 die Hypothese des spitzen Winkels auch nur in einem Falle richtig
 ist, so ist sie immer in jedem Falle allein die richtige. Was zu be-
 weisen war.

Lehrsatz VIII. *Gegeben sei irgend ein Dreieck ABD (Fig. 7), das in B rechtwinklig ist. Man verlängere DA bis zu einem beliebigen Punkte X und ziehe durch A , auf AB senkrecht, HAC , wo H innerhalb des Winkels XAB liege. Ich behaupte, daß der äußere Winkel XAH gleich dem inneren gegenüberliegenden Winkel ADB oder kleiner oder größer als dieser ist, jenachdem die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels richtig ist. Und umgekehrt.*

Beweis. Man nehme auf HC ein Stück AC gleich BD an und ziehe CD . Dann ist bei der Hypothese des rechten Winkels (nach Lehrsatz III) CD gleich AB . Daher ist (nach I. 8) der Winkel ADB gleich dem Winkel DAC oder dem (nach I. 15) ebenso großen Winkel XAH . Was an erster Stelle zu beweisen war.

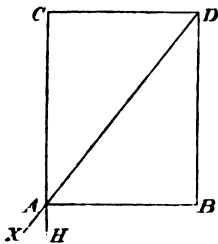


Fig. 7.

Weiter ist bei der Hypothese des stumpfen Winkels (wieder nach Lehrsatz III) CD kleiner als AB . Daher ist in den Dreiecken ADB und DAC (nach I. 25) der Winkel DAC oder (sein Scheitelwinkel) XAH kleiner als der Winkel ADB . Was an zweiter Stelle zu beweisen war.

Endlich ist bei der Hypothese des spitzen Winkels (wieder nach Lehrsatz III) CD größer als die Gegenseite AB . Daher ist in den erwähnten Dreiecken (wieder nach I. 25) der Winkel DAC oder (sein Scheitelwinkel) XAH größer als der Winkel ADB . Was an dritter Stelle zu beweisen war.

Ist aber umgekehrt der Winkel CAD oder sein Scheitelwinkel XAH gleich dem inneren gegenüberliegenden Winkel ADB , so ist (nach I. 4) die Verbindungslinie CD gleich AB , und deshalb (nach
 11 Lehrsatz IV) die Hypothese des rechten Winkels richtig.

Wenn dagegen der Winkel CAD oder sein Scheitelwinkel XAH kleiner oder größer ist, als der innere gegenüberliegende Winkel ADB , so ist (nach I. 24) auch die Verbindungslinie CD kleiner oder größer als AB , und deshalb ist (nach Lehrsatz IV) jenachdem die Hypothese des stumpfen oder die des spitzen Winkels richtig. Und das ist alles, was zu beweisen war.

Lehrsatz IX. *In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden übrigen spitzen Winkel zusammen genommen gleich einem Rechten bei der Hypothese des rechten Winkels, größer als ein Rechter bei der Hypothese des stumpfen Winkels und kleiner als ein Rechter bei der Hypothese des spitzen Winkels*).*

Beweis. Ist nämlich der Winkel XAH (in derselben Figur, wie bei dem vorhergehenden Lehrsatz) gleich dem Winkel ADB (versteht sich, bei der Hypothese des rechten Winkels, nach dem vorhergehenden Lehrsatz), so ergiebt der Winkel ADB mit dem Winkel HAD zusammen zwei Rechte, da ja (nach I. 13) der schon genannte Winkel XAH mit demselben Winkel HAD zwei Rechte ergiebt. Also bleibt, wenn man den rechten Winkel HAB wegnimmt, die Summe der Winkel ADB und BAD gleich einem Rechten. Das war das Erste.

Ferner aber, ist der Winkel XAH (versteht sich, bei der Hypothese des stumpfen Winkels, nach dem vorhergehenden Lehrsatz) kleiner als der Winkel ADB , so ergiebt der Winkel ADB zusammen mit dem Winkel HAD mehr als zwei Rechte, da der Winkel XAH (wieder nach I. 13) mit diesem zusammen zwei Rechte ergiebt. Also bleibt, wenn man den rechten Winkel HAB wegnimmt, die Summe der Winkel ADB und BAD größer als ein Rechter. Das war das Zweite.

Endlich, ist der Winkel XAH (versteht sich, bei der Hypothese des spitzen Winkels, nach dem vorhergehenden Lehrsatz) größer als der Winkel ADB , so ergiebt der Winkel ADB zusammen mit dem Winkel HAD weniger als zwei Rechte, da der Winkel XAH (abermals nach I. 13) mit diesem zusammen zwei Rechte ergiebt. Also ¹² bleibt, wenn man den rechten Winkel HAB wegnimmt, die Summe der Winkel ADB und BAD kleiner als ein Rechter. Das war das Dritte.

Lehrsatz X. *Steht die Gerade DB (Fig. 8) senkrecht auf irgend einer Geraden ABM , und ist die Verbindungslinie DM größer als die Verbindungslinie DA , so ist auch die Grundlinie BM größer als die Grundlinie BA , und umgekehrt.*

Beweis. Zunächst sind diese Grundlinien nicht einander gleich, denn sonst wären (nach I. 4), gegen die Voraussetzung, auch AD und DM einander gleich. Es ist aber auch BA nicht größer als BM .

*) [Saccheri sagt „die beiden übrigen spitzen Winkel“, indem er I. 17 benutzt, wonach die Summe zweier Dreieckswinkel stets kleiner als zwei Rechte ist. Lässt man aber die Hypothese des stumpfen Winkels zu, so gilt der Satz I. 17 nicht mehr, denn er ist ja eine unmittelbare Folge des Satzes I. 16 über den Außenwinkel. In der That beweist Saccheri später, in Lehrsatz XIV, daß die Hypothese des stumpfen Winkels sich selbst zerstört, indem sie auf einen Widerspruch gegen I. 17 führt. Vergl. auch die zweite Anmerkung auf S. 52.]

Sonst wären nämlich, wenn man auf BA ein Stück BS gleich BM annähme und SD zöge, (wieder nach I. 4) die Winkel BSD und BMD gleich.

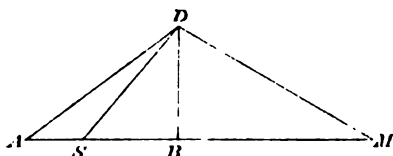


Fig. 8.

Nun ist (nach I. 16) der Winkel BSD größer als der Winkel BAD . Es wäre also auch der Winkel BMD größer als dieser. Das verstößt aber gegen I. 18, da nach der Voraussetzung in dem Dreieck MDA die Seite DM größer

ist als die Seite DA . Es bleibt also nur übrig, daß die Grundlinie BM größer ist als die Grundlinie BA . Das war an erster Stelle zu beweisen.

Wenn zweitens eine der beiden Grundlinien, zum Beispiel (um die Figur beizubehalten) BA , größer als die andere BM angenommen wird, so ist die Verbindungslinie DS , die von BA ein Stück SB gleich BM abschneidet, (nach I. 4) gleich der Verbindungslinie DM . Ferner wird (nach I. 16) der Winkel DSA stumpf und (nach I. 17) der Winkel DAS spitz. Deshalb ist (nach I. 19) die Verbindungslinie DA größer als die Verbindungslinie DS und auch größer als die Verbindungslinie DM , die nach der Annahme gleich DS ist. Das war an zweiter Stelle zu beweisen.

Mithin ist die Behauptung durchaus richtig.

- 13 **Lehrsatz XI.** Eine Gerade AP (von beliebiger Länge) schneide zwei Gerade PL und AD (Fig. 9), und zwar die erste in P unter

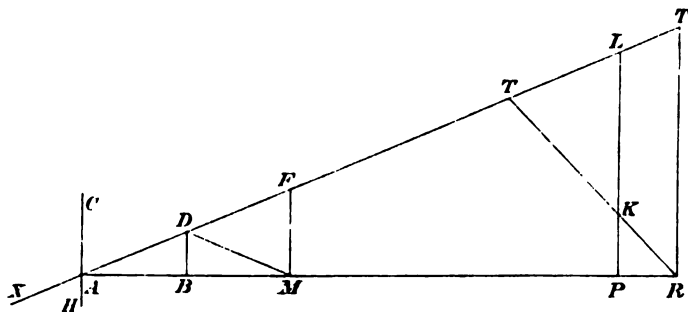


Fig. 9.

einem rechten Winkel, die zweite aber in A unter einem beliebigen spitzen Winkel, der sich nach der Seite von PL hin öffnet. Ich behaupte, daß (bei der Hypothese des rechten Winkels) die Geraden AD und PL in einem gewissen Punkte, und zwar in endlicher oder begrenzter Entfernung, schließlich zusammentreffen werden, wenn man sie nach der Seite ver-

längert, wo sie mit der Grundlinie AP zwei Winkel bilden, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Beweis. Man verlängere DA nach der andern Seite bis zu einem beliebigen Punkte X und ziehe durch A die Gerade HAC senkrecht zu AP , wo der Punkt H innerhalb des Winkels XAP liegt. Dann nehme man auf der Verlängerung von AD nach der Seite von PL zwei gleich lange Strecken AD und DF an und fälle auf die Grundlinie AP die Lote DB und FM , die wegen I. 17 stets in das Innere des spitzen Winkels DAP fallen. Man ziehe noch DM . Ich muß zeigen, daß die Verbindungslinie DM gleich DF oder DA wird.

Zunächst kann DM nicht größer als DF sein. Sonst wäre nämlich (nach I. 18) der Winkel DMF kleiner als der Winkel DFM oder als der diesem gleiche Winkel XAH (nach Lehrsatz VIII, im Fall der Hypothese des rechten Winkels) oder als sein Scheitelwinkel CAD . Mithin wäre (da der Voraussetzung nach die Winkel CAM und FMA gleich sind, nämlich rechte) der übrig bleibende Winkel DMA größer als der übrig bleibende Winkel DAM . Das ist aber widersinnig (gegen I. 18), weil ja DM größer als DF oder DA angenommen ist.

Es ist aber auch DM nicht kleiner als DF . Sonst wäre nämlich (auch nach I. 18) der Winkel DMF größer als der Winkel DFM oder als der ihm gleiche Winkel XAH (nach dem erwähnten Lehrsatz VIII, im Fall der Hypothese des rechten Winkels) oder als sein Scheitelwinkel CAD . Mithin wäre wiederum, wie vorhin, der übrig bleibende Winkel DMA nicht größer sondern kleiner als der 14 übrig bleibende Winkel DAM . Das ist aber widersinnig (auch gegen I. 18), weil ja DM kleiner als DF oder DA angenommen wurde.

Es bleibt daher nur übrig, daß die Verbindungslinie DM gleich DF oder DA wird. Deshalb sind (nach I. 5) in dem Dreieck DAM die Winkel an den Ecken A und M gleich und mithin (nach I. 26) in den Dreiecken DBA und DBM , die in B rechtwinklig sind, die Grundlinien AB und BM gleich. Darauf aber kam es hier an.

Da somit (wenn man auf der Verlängerung von AD die Strecke AF doppelt so groß als AD nimmt) das auf die Grundlinie AP gefällte Lot FM von AP nach P hin eine Grundlinie AM abschneidet, doppelt so groß als die Grundlinie AB , welche das von D aus gefällte Lot abschneidet, so ist klar, daß diese Verdoppelung der vorhergehenden Strecke so oft geschehen kann, daß man auf diese Art zu einem Punkte T in der Verlängerung von AD gelangt, bei welchem das von ihm auf die Verlängerung von AP gefällte Lot eine Grundlinie AR abschneidet, die größer ist als das beliebige, endliche AP .

Dies kann jedoch sicher nicht eintreten, wenn nicht vorher die Verlängerung von AD einen gewissen Punkt L von PL getroffen hat.

Wenn nämlich der Punkt T vor jenem Zusammentreffen läge, so müßte das Lot TR dieselbe Gerade PL in einem Punkte K schneiden. Dann aber befänden sich bei dem Dreieck KPR in den Ecken P und R zwei rechte Winkel, was gegen I. 17 verstößt.

Demnach steht fest, daß die beiden Geraden AD und PL (im Fall der Hypothese des rechten Winkels) einander in einem Punkte treffen werden (und zwar in einem endlichen oder begrenzten Abstände), wenn sie nach der Seite hin verlängert werden, auf der sie mit der Grundlinie AP (von beliebiger, endlicher Länge) zwei Winkel bilden, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. Was zu beweisen war.

- 15 **Lehrsatz XII.** *Wiederum behaupte ich, daß auch bei der Hypothese des stumpfen Winkels die Gerade AD irgendwo auf jener Seite die Gerade PL treffen wird (und zwar in einem endlichen oder begrenzten Abstände)*).*

Beweis. Ist nämlich, wie bei dem vorhergehenden Lehrsatz, DF gleich AD gemacht [Fig. 10] und sind die schon bekannten Lote gefällt, so muß ich zeigen, daß die Verbindungslinie DM größer ist

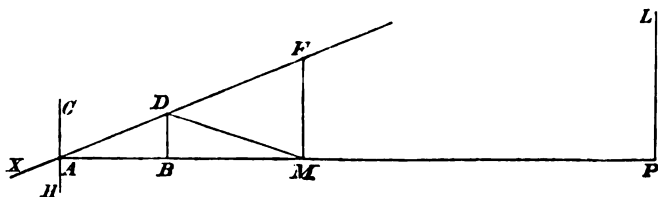


Fig. 10.

als DF oder DA , und daß mithin (nach Lehrsatz X) BM größer ist als AB .

Zunächst wird DM nicht gleich DF sein. Sonst wäre nämlich (nach I. 5) der Winkel DMF gleich dem Winkel DFM und mithin (nach Lehrsatz VIII, im Fall der Hypothese des stumpfen Winkels) größer als der äußere Winkel XAH oder als sein Scheitelwinkel CAF . Mithin wäre (da der Voraussetzung nach die Winkel CAM und FMA gleich sind, nämlich rechte) der übrigbleibende Winkel DMA kleiner als der übrigbleibende Winkel DAM . Das verstößt aber gegen I. 5, weil ja DM gleich DF oder DA sein sollte.

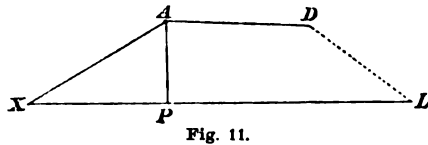
*) [Dieser Satz ist richtig, während der folgende Beweis beanstandet werden muß, da in ihm der Satz vom Außenwinkel (I. 16) verwendet wird, der bei der Hypothese des stumpfen Winkels seine Gültigkeit verliert.]

Es ist aber DM auch nicht kleiner als DF oder DA . Sonst wäre nämlich (nach I. 18) der Winkel DMF gröfser als der Winkel DFM und mithin (bei der gegenwärtigen Hypothese des stumpfen Winkels) noch viel gröfser als der äufsere Winkel XAH oder sein Scheitelwinkel CAD . Mithin wäre wieder, wie vorhin, der übrigbleibende Winkel DMA viel kleiner als der übrigbleibende Winkel DAM . Das verstöfst aber wieder gegen I. 18, weil ja DM kleiner sein sollte als DF oder DA .

Es bleibt also nur übrig, dafs die Verbindungslinie DM gröfser ist als DF oder DA , und dafs daher (nach Lehrsatz X) BM gröfser ist als AB . Darauf aber kam es hier an.

Da mithin, wenn man in der Verlängerung von AD eine Strecke AF doppelt so grofs als die Strecke AD nimmt, das auf die Grundlinie AP gefällte Lot FM von dieser mehr als doppelt so viel abschneidet, als das von D auf sie gefällte Lot, so kommt man bei der 16 Hypothese des stumpfen Winkels noch bei Weitem schneller als vorhin bei der Hypothese des rechten Winkels zu einer so grofsen Strecke, dafs das von ihrem Endpunkte aus gefällte Lot eine Grundlinie abschneidet, die gröfser ist als die beliebig grofse, gegebene AP . Das kann aber, wie bei dem vorhergehenden Lehrsatze, nicht eintreten, wenn nicht vorher die Verlängerung von AD einen gewissen Punkt von PL , und zwar in einer endlichen oder begrenzten Entfernung getroffen hat. Was zu beweisen war.

Lehrsatz XIII. Wenn eine Gerade XA (von beliebig grofser gegebener Länge) die beiden Geraden AD und XL schneidet und mit ihnen auf derselben Seite (Fig. 11) innere Winkel XAD und AXL bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so behaupte ich, dafs diese beiden Geraden (auch wenn keiner von jenen beiden Winkeln ein Rechter ist) endlich in einem Punkte auf der Seite jener Winkel zusammentreffen werden, und zwar in einem endlichen oder begrenzten Abstände, sobald eine der beiden Hypothesen entweder die des rechten oder die des stumpfen Winkels besteht*).



Beweis. Einer der genannten Winkel, zum Beispiel AXL , wird spitz sein. Wenn man daher vom Scheitelpunkte des andern Winkels auf XL das Lot AP fällt, so liegt es (wegen I. 17) stets im Innern

*) [Auch hier gilt, was bereits in der Anmerkung zu Lehrsatz XII gesagt worden ist.]

des spitzen Winkels AXL . Da nun in dem Dreieck APX , das bei P rechtwinklig ist, die beiden spitzen Winkel PAX und PXA (nach Lehrsatz IX) zusammengenommen nicht kleiner sind als ein Rechter, sowohl bei der Hypothese des rechten als bei der des stumpfen Winkels, so wird, wenn man diese beiden Winkel von der Summe der vorgelegten abzieht, der übrig bleibende Winkel PAD kleiner als ein Rechter sein. Mithin sind wir im Falle der beiden vorhergehenden Lehrsätze, da ja eine von beiden Hypothesen, entweder die des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels besteht. Demnach werden (nach denselben Lehrsätzen) die Geraden AD und PL oder XL in einem Punkte von endlichem oder begrenztem Abstände
 17 auf der bekannten Seite zusammentreffen, sowohl bei der einen als auch bei der andern der vorhin erwähnten Hypothesen. Was zu beweisen war.

Anmerkung I. Hier möge ein beachtenswerter Unterschied gegenüber der Hypothese des spitzen Winkels angemerkt werden. Denn bei dieser könnte man das Zusammentreffen derartiger Geraden nicht allgemein beweisen, so oft nämlich eine Gerade, die zwei andere schneidet, auf einer Seite zwei innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. Man könnte es, sage ich, nicht einmal dann direkt beweisen, wenn man bei dieser Hypothese das erwähnte Zusammentreffen allgemein zuliefse, sobald einer der zwei Winkel ein Rechter ist. Denn selbst, wenn die Gerade AD [Fig. 11] auch ihrerseits auf AP senkrecht wäre, ein Fall, in dem sie wegen I. 17 sicher mit dem andern Lote PL nicht zusammentreffen könnte, so wäre trotzdem die Summe der beiden Winkel DAX und PXA , gemäß der erwähnten Hypothese, kleiner als zwei Rechte, da bei dieser (nach Lehrsatz IX) die Winkel PAX und PXA zusammen kleiner als ein Rechter sind*). Das zu bemerken war aber von Wichtigkeit.

Wie man aber die Hypothese des spitzen Winkels zerstören kann, indem man bloß das Zusammentreffen allgemein zuläßt, so lange einer der beiden Winkel ein Rechter ist, und überdies die gegebene schneidende Gerade $[PA]$ eine beliebig kleine Länge hat, das werde ich hinter den drei folgenden Lehrsätzen zeigen.

Anmerkung II).** Mit Fleiß habe ich bei den drei soeben auf-

*) [Man hätte also einen Fall, bei dem die beiden Geraden AD und XL nicht zusammentreffen, obwohl die Summe der inneren Winkel LXA und XAD kleiner als zwei Rechte ist.]

**) [Der Sinn der folgenden Ausführungen ist der: Sind zwei Winkel gegeben, die zusammen weniger als zwei Rechte betragen, so ist es stets möglich,

gestellten Theoremen die Bedingung hinzugefügt, daß die schneidende Gerade AP oder XA von *beliebig großer, gegebener Länge* sein soll. Handelt es sich nämlich, ohne jedes bestimmte Maß der einfallenden Geraden, darum, genau darzulegen und zu beweisen, daß es zwei Gerade giebt, die in der Spitze eines Dreiecks zusammentreffen, dessen Winkel an der Grundlinie gegeben sind (und zwar zusammen kleiner als zwei Rechte, zum Beispiel sei einer gleich einem Rechten und der andere weiche nur um zwei Grad oder, wenn man will, noch weniger von einem Rechten ab), dann kann jeder, der einige Erfahrung in der Geometrie besitzt, sofort die Sache darlegen und beweisen.

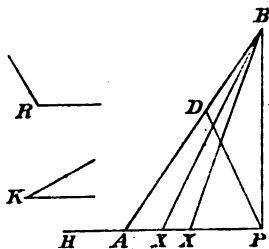


Fig. 12.

Gesetzt nämlich, es sei (Fig. 12*) ein Winkel BAP gegeben, zum Beispiel von 88 Grad. Fällt man dann (nach I. 12) von irgend einem Punkte B der Geraden AB das Lot BP auf die Grundlinie AP , so wird augenscheinlich durch das Dreieck ABP das gewünschte Zusammentreffen im Punkte B dargelegt und bewiesen.

Fordert man nun, daß auch der andere Winkel an der Grundlinie kleiner als ein Rechter sei, zum Beispiel 84 Grad, wie ihn der gegebene Winkel K darstellen mag**), so kann man (nach I. 23) auf

Dreiecke zu konstruieren, in denen diese gegebenen Winkel vorkommen. Wählt man daher die Dreiecksseite, der sie anliegen, zur Grundlinie AX , so hat man für diese Winkel das gewünschte Zusammentreffen. Es bleibt jedoch unentschieden, ob man auf diese Art auch zu *jeder* gegebenen Grundlinie AX gelangt, was doch zum vollständigen Beweise des Euklidischen Axioms erforderlich wäre.]

*) [Saccheri benutzt in vielen Figuren denselben Buchstaben, hier X , zur Bezeichnung verschiedener Punkte, die jedoch in gewisser Beziehung mit einander gleichberechtigt sind.]

Diese Bezeichnungswaise ist ihm nicht eigentümlich, sie findet sich vielmehr auch sonst in der älteren mathematischen Literatur, zum Beispiel gebraucht sie Blaise Pascal (1623—1660) in seinen geometrischen Untersuchungen (Œuvres complètes, t. III. Paris 1882, S. 370—446), John Barrow (1630—1677) in seinen Lectiones geometricae, London 1670 (Zweite Ausgabe London 1674), Johann Bernoulli (1667—1748) in seiner Abhandlung über die Brachistochrone (Acta Eruditorum, Mai 1697; Opera omnia, Lausanne und Genf 1742, T. 1. S. 192). Die Zahl der Beispiele ließe sich gewiß noch beliebig vermehren.

Die so bequeme Methode der Indices, die bereits am Ende des siebzehnten Jahrhunderts von Leibniz vorgeschlagen worden war, ist erst in diesem Jahrhundert ein Gemeingut der Mathematiker geworden.]

**) [Daß der Winkel K in Fig. 12 statt 84 Grad etwa 30 Grad beträgt, ebenso wie nachher der Winkel R statt 91 Grad etwa 120 Grad, das stört Saccheri nicht, der, wie später noch augenfälliger werden wird, seine Zeichnungen immer nur als schematisch betrachtet haben muß; man vergleiche in dieser Beziehung etwa noch die rechten Winkel in Fig. 19, S. 74.]

Wir haben uns nicht für befugt gehalten, Zeichnung und Text in Übereinstimmung zu bringen und geben hier wie überall die Figuren in ihrer ursprünglichen Gestalt.]

der Seite der Geraden AB einen ebenso grossen Winkel APD antragen, und dann wird AB von PD in einem Zwischenpunkte D getroffen. Man hat also wieder einen Beweis für das gewünschte Zusammentreffen im Punkte D .

Fordert man endlich, daß der eine Winkel stumpf, aber kleiner als 92 Grad ist, damit ihn der andere gegebene Winkel BAP nicht zu zwei Rechten ergänzt, so möge er durch einen Winkel R von 91 Grad dargestellt werden. Zu zeigen ist, daß es auf AP einen solchen Punkt X giebt, daß die Verbindungslinie BX einen Winkel BXA bildet, der gleich dem gegebenen Winkel R von 91 Grad ist, sodafs man also bei einer gewissen schneidenden Geraden AX das gewünschte Zusammentreffen in dem genannten Punkte B hat. Man verfährt dann so.

Da ja (wenn man PA bis zu irgend einem Punkte H verlängert) der äufsere Winkel BAH (wegen I. 13) gleich 92 Grad ist, wenn der gegebene innere Winkel BAP 88 Grad beträgt, und da er wiederum, wegen I. 16, nicht nur gröfser ist als der rechte Winkel BPA , sondern auch gröfser als alle die, ebendeshalb stumpfen Winkel BXA , wo der Punkt X beliebig innerhalb PA angenommen wird, und da, auch wegen I. 16, diese Winkel um so gröfser sind, je näher der Punkt X an dem Punkte A angenommen wird, so folgt augenscheinlich, daß
 19 zwischen den beiden Winkeln, dem einen von 90 Grad im Punkte P und dem andern von 92 Grad im Punkte A ein Winkel BXA gefunden werden kann, der 91 Grad beträgt und also dem gegebenen Winkel R gleich ist*).

Nichtsdestoweniger mufs man, abgesehen von dieser letzten Bemerkung über den stumpfen Winkel, sorgfältig beachten, daß die Schwierigkeit bei jenem Axiom des Euklid darin besteht, daß es das Zusammentreffen zweier Geraden fordert, und zwar stets nach der Seite, auf welcher sie mit der schneidenden Geraden zwei Winkel bilden, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, und daß es das genannte Zusammentreffen auch dann fordert, *wenn die Länge der gegebenen schneidenden Geraden beliebig grofs ist*.

Übrigens werde ich (worauf ich schon in der vorhergehenden Anmerkung aufmerksam machte) jenes Zusammentreffen allgemein beweisen**), sobald nur das Zusammentreffen für den Fall zugelassen wird, daß einer der Winkel ein rechter [und der andere irgend ein beliebiger spitzer Winkel] ist, und zwar selbst dann, wenn es nicht für

*) [Saccheri setzt dabei voraus, daß sich der Winkel BXA stetig ändert, wenn der Punkt X von A nach P wandert. Vergl. auch die Anmerkung S. 56.]

**) [Nämlich in Lehrsatz XVII und in Anmerkung I dazu.]

jede beliebige angebbare endliche schneidende Gerade zugelassen wird, sondern nur innerhalb der Grenzen irgend einer gegebenen, sehr kleinen schneidenden Geraden.

Lehrsatz XIV. *Die Hypothese des stumpfen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört.*

Beweis. Indem wir die Hypothese des stumpfen Winkels als richtig annehmen, haben wir daraus bereits die Wahrheit jenes Euklidischen Axioms hergeleitet, daß zwei Gerade einander in einem Punkte auf der Seite treffen werden, auf welcher eine beliebige sie schneidende Gerade irgend zwei innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. Steht aber dieses Axiom fest, auf das sich Euklid nach dem achtundzwanzigsten Satze seines ersten Buches stützt, dann ist allen Geometern klar, daß allein die Hypothese des rechten Winkels richtig ist, und daß für die Hypothese des stumpfen Winkels kein Platz übrig bleibt. Mithin ist die Hypothese des stumpfen Winkels ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört. Was zu beweisen war.

Anders und unmittelbarer. Da wir (in Lehrsatz IX) auf Grund 20 der Hypothese des stumpfen Winkels bewiesen haben, daß die beiden spitzen Winkel (Fig. 11) eines Dreiecks APX , das in P rechtwinklig ist, zusammen größer als ein Rechter sind, so kann man augenscheinlich einen spitzen Winkel PAD so annehmen, daß er mit den genannten beiden spitzen Winkeln zwei Rechte ausmacht. Dann aber müßte die Gerade AD (nach dem vorhergehenden Lehrsatz, im Fall der Hypothese des stumpfen Winkels) schließlich mit PL oder XL zusammentreffen, wenn man AP als die schneidende oder treffende Gerade ansieht. Das verstößt aber augenscheinlich gegen I. 17, wenn man AX als die schneidende oder treffende Gerade ansieht.

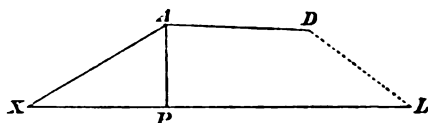


Fig. 11.

Lehrsatz XV. *Durch irgend ein Dreieck ABC , dessen drei Winkel (Fig. 13) zusammen gleich zwei Rechten oder größer oder kleiner sind, wird der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt*).*

*) [Auch für den Beweis dieses Satzes gilt das in den Anmerkungen auf S. 59 und 62 Gesagte.]

Beweis. Es werden nämlich wegen I. 17 wenigstens zwei Winkel jenes Dreiecks, zum Beispiel die an den Ecken A und C , spitz sein. Deshalb wird das Lot, das vom Scheitelpunkte des letzten Winkels B auf AC gefällt wird, AC selbst (wieder wegen I. 17) in einem gewissen Zwischenpunkte D schneiden.

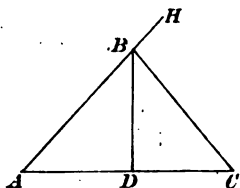


Fig. 13.

Nimmt man also an, daß die drei Winkel des Dreiecks ABC zusammen gleich zwei Rechten sind, so sind augenscheinlich alle Winkel der Dreiecke ADB und CDB zusammen gleich vier Rechten, da ja die beiden rechten Winkel bei dem Punkte D hinzugekommen sind. Nunmehr wird bei keinem der eben erwähnten Dreiecke, etwa bei ADB , die Winkelsumme kleiner oder größer als zwei Rechte sein, denn alsdann wären dementsprechend die Winkel des andern Dreiecks zusammen größer oder kleiner als zwei Rechte, und infolgedessen würde (nach Lehrsatz IX) durch das eine Dreieck die Hypothese des spitzen Winkels, durch das andre die Hypothese des stumpfen Winkels bedingt, was den Lehrsätzen VI und VII widerstreitet. Also sind bei jedem der genannten beiden Dreiecke die drei Winkel zusammen gleich zwei Rechten, und dadurch wird (nach Lehrsatz IX) die Hypothese des rechten Winkels bedingt. Was an erster Stelle zu beweisen war.

Nimmt man aber an, daß die drei Winkel des vorgelegten Dreiecks ABC zusammen größer als zwei Rechte sind, so werden die Winkel der beiden Dreiecke ADB und CDB alle zusammen größer als vier Rechte, weil ja die beiden rechten Winkel beim Punkte D hinzugekommen sind. Demnach werden bei keinem der eben genannten Dreiecke die drei Winkel zusammen genau gleich zwei Rechten sein oder kleiner, denn alsdann wären dementsprechend die drei Winkel des anderen Dreiecks zusammen größer als zwei Rechte, es würde also (nach Lehrsatz IX) durch das eine Dreieck die Hypothese des rechten Winkels oder die des spitzen Winkels, durch das andere die Hypothese des stumpfen Winkels bedingt, was den Lehrsätzen V, VI und VII widerstreitet. Also sind bei jedem der genannten beiden Dreiecke die drei Winkel zusammen größer als zwei Rechte und dadurch wird (nach Lehrsatz IX) die Hypothese des stumpfen Winkels bedingt. Was an zweiter Stelle zu beweisen war.

Nimmt man aber endlich an, daß die drei Winkel des vorgelegten Dreiecks ABC zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so werden die Winkel der beiden Dreiecke ADB und CDB alle zusammen kleiner als vier Rechte, weil ja die beiden rechten Winkel beim Punkte D hinzu-

gekommen sind. Demnach werden bei keinem der eben genannten Dreiecke die drei Winkel zusammen genau gleich zwei Rechten oder größer sein, denn alsdann wären dementsprechend die drei Winkel des andern Dreiecks zusammen kleiner als zwei Rechte, es würde also nach Lehrsatz IX durch das eine Dreieck die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels, durch das andere die Hypothese des spitzen Winkels bedingt, was den Lehrsätzen V, VI und VII widerspricht. Also sind bei jedem der genannten beiden Dreiecke die drei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte, und dadurch wird (nach Lehrsatz IX) die Hypothese des spitzen Winkels bedingt. Was 22 an dritter Stelle zu beweisen war.

Mithin wird durch ein beliebiges Dreieck ABC , dessen drei Winkel zusammen gleich zwei Rechten oder größer oder kleiner sind, der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels, die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt. Was behauptet wurde.

Zusatz. Verlängert man also irgend eine Seite eines beliebigen vorgelegten Dreiecks, zum Beispiel AB bis H [Fig. 13], so ist (nach I. 13) der Außenwinkel HBC entweder gleich der Summe der beiden übrigen inneren, gegenüberliegenden Winkel bei den Ecken A und C , oder kleiner oder größer als diese, jenachdem die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels richtig ist, und umgekehrt.

Lehrsatz XVI. Durch jedes Viereck $ABCD$, dessen vier Winkel zusammen gleich vier Rechten oder größer oder kleiner sind, wird der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels, die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt.

Beweis. Zieht man AC , so sind (Fig. 14) die drei Winkel des Dreiecks ABC zusammen nicht gleich zwei Rechten oder größer oder kleiner, ohne daß auch die drei Winkel des Dreiecks ADC zusammen gleich zwei Rechten oder größer oder kleiner sind, denn sonst würde (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) durch eines dieser Dreiecke eine Hypothese, durch das andere eine andere bedingt, entgegen den Lehrsätzen V, VI und VII.

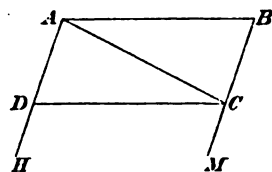


Fig. 14.

Wenn demnach die vier Winkel des vorgelegten Vierecks zusammen gleich vier Rechten sind, so betragen augenscheinlich in jedem der eben genannten Dreiecke die drei Winkel zusammen zwei Rechte, und dadurch wird (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Hypothese des rechten Winkels bedingt.

Wenn aber die vier Winkel desselben Vierecks zusammen gröfser oder kleiner als vier Rechte sind, so müssen in ähnlicher Weise die drei Winkel jedes jener Dreiecke zusammen beziehungsweise entweder gleichzeitig gröfser oder gleichzeitig kleiner als zwei Rechte sein. Deshalb wird (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) durch diese Dreiecke beziehungsweise die Hypothese des stumpfen Winkels oder die Hypothese des spitzen Winkels bedingt.

Somit wird durch jedes Viereck, dessen vier Winkel zusammen gleich vier Rechten oder gröfser oder kleiner sind, der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels, die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt. Was zu beweisen war.

Zusatz. Verlängert man also irgend zwei Gegenseiten eines vorgelegten Vierecks [Fig. 14] nach derselben Seite, etwa AD bis H und BC bis M , so ist (nach I. 13) die Summe der beiden Aufsenwinkel HDC und MCD entweder gleich der Summe der beiden inneren, gegenüberliegenden Winkel bei den Ecken A und B , oder kleiner oder gröfser, jenachdem die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels richtig ist.

Lehrsatz XVII. Wenn auf einer beliebig kleinen Geraden AB (Fig. 15) die Gerade AH senkrecht steht, so behaupte ich, dafs bei der Hypothese des spitzen Winkels nicht jede Gerade BD , die mit AB auf der Seite von AH einen beliebigen spitzen Winkel bildet, die Verlängerung von AH schliefslich in einer endlichen oder begrenzten Entfernung trifft.

Beweis. Zieht man HB , so ist (nach I. 17) der Winkel ABH spitz, weil der Winkel beim Punkte A ein Rechter ist. Nunmehr ziehe man (nach I. 23) nach der Seite des Punktes B eine Gerade HD , die den Winkel AHB nicht schneidet und mit HB einen spitzen Winkel bildet, der gleich dem spitzen Winkel ABH ist. Sodann fälle man von dem Punkte B auf HD das Lot BD , das auf die Seite des genannten spitzen Winkels bei dem Punkte H fallen wird.

Da also die Seite HB in dem Dreieck HDB dem rechten Winkel bei D gegenüberliegt und ebenso im Dreieck BAH dem rechten Winkel bei A , und da wiederum in diesen beiden Dreiecken an derselben Seite HB gleiche Winkel liegen, nämlich im ersten Dreieck der Winkel BHD und im zweiten der Winkel HBA , so ist (nach I. 26) auch der letzte Winkel HBD im ersten Dreieck gleich dem letzten Winkel BHA im zweiten

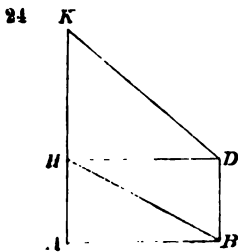


Fig. 15.

Dreieck. Deshalb ist der ganze Winkel DBA gleich dem ganzen Winkel AHD .

Nun sind aber die genannten gleichen Winkel nicht beide stumpf, denn sonst gerieten wir (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) auf einen Fall der schon widerlegten Hypothese des stumpfen Winkels. Sie sind aber auch nicht rechte, denn sonst gerieten wir (wieder nach dem vorhergehenden Lehrsatz) auf einen Fall der Hypothese des rechten Winkels, die (nach Lehrsatz V) für die Hypothese des spitzen Winkels keinen Raum ließe. Daher sind beide Winkel spitz.

Nunmehr beweist man folgendermaßen, daß die Verlängerung der Geraden BD mit der Verlängerung der Geraden AH nach derselben Seite hin nicht in einem Punkte K zusammentreffen kann.

In dem Dreieck KDH wäre nämlich außer dem rechten Winkel bei D ein stumpfer Winkel in H vorhanden, da der Winkel AHD bei der hier vorgeschriebenen Hypothese des spitzen Winkels als spitz erwiesen ist. Das ist aber unverträglich mit I. 17. Mithin ist es bei dieser Hypothese ausgeschlossen, daß jede Gerade BD , die mit einer beliebig kleinen Geraden AB auf der Seite von AH einen beliebigen spitzen Winkel bildet, die Verlängerung von AH schließlich in einer endlichen oder begrenzten Entfernung trifft. Was zu beweisen war.

Dasselbe anders und einfacher. Auf einer beliebig kleinen Geraden AB (Fig. 16) mögen AK und BM beide senkrecht stehen.

Man falle auf AK aus einem Punkte M von BM das Lot MH und ziehe BH . Dann ist der Winkel BHM spitz. Ebenso ist bei der Hypothese des spitzen Winkels (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) der Winkel BMH spitz. Mithin wird das Lot BDX , das von dem Punkte B auf HM gefällt wird, (nach I. 17) HM in einem Zwischenpunkte D schneiden, also ist der Winkel XBA spitz.

Nun weiß man (wieder aus I. 17), daß die beiden Geraden AHK und BDX , beliebig verlängert, nicht zusammentreffen können (versteht sich, in einer endlichen oder begrenzten Entfernung), weil die Winkel an den Punkten H und D rechte sind. Mithin ist es bei der Hypothese des spitzen Winkels ausgeschlossen, daß jede Gerade BD , die mit einer beliebig kleinen Geraden AB auf der Seite von AH , das auf AB senkrecht steht, einen beliebigen spitzen Winkel bildet, die Verlängerung von AH schließlich (in einer endlichen oder begrenzten Entfernung) trifft. Was behauptet war.

Anmerkung I. Das ist es gerade, was ich in den Anmerkungen

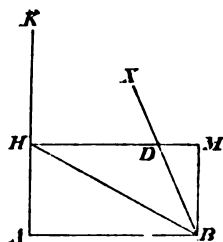


Fig. 16.

hinter dem Lehrsatz XIII versprochen hatte, daß nämlich die Hypothese des spitzen Winkels (die nunmehr allein der allgemeinen Gültigkeit jenes Euklidischen Axioms im Wege sein kann) hinfällig wird, sobald man nur allgemein zuläßt, daß zwei Gerade auf der Seite zusammen-treffen müssen, auf der irgend eine sie schneidende Gerade, die beliebig klein sein darf, zwei innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, und zwar auch dann noch, wenn verlangt wird, daß der eine der beiden Winkel ein Rechter sei.

Anmerkung II. Wiederum werde ich an einer geeigneteren Stelle, nämlich [in der Anmerkung III] hinter dem Lehrsatz XXVII, zeigen, daß die Hypothese des spitzen Winkels ebenfalls hinfällig wird, sobald
26 man irgend einen noch so kleinen spitzen Winkel von der Beschaffenheit angeben kann, daß die Verlängerung einer Geraden, die unter diesem Winkel von einer anderen geschnitten wird, schließlich (in endlicher oder begrenzter Entfernung) jedes in beliebigem, endlichem Abstände auf der schneidenden Geraden errichtete Lot treffen muß.

Lehrsatz XVIII. *Durch jedes beliebige Dreieck ABC , dessen Winkel beim Punkte B (Fig. 17) in irgend einem Halbkreise mit AC als Durchmesser liegt, wird der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt, je nachdem der Winkel beim Punkte B ein rechter oder stumpfer oder spitzer ist.*

Beweis. Vom Mittelpunkt D aus ziehe man DB . Dann sind (nach I. 5) in den Dreiecken ADB und CDB die Winkel an der Grundlinie AB und ebenso die an der Grundlinie BC gleich. Mithin sind in dem Dreieck ABC die beiden Winkel an der Grundlinie AC zusammen gleich dem ganzen Winkel ABC , und es sind daher die drei Winkel des Dreiecks ABC zusammen gleich zwei Rechten oder größer oder kleiner, je nachdem der Winkel beim Punkte B ein rechter, stumpfer oder spitzer ist.

Daher wird durch jedes beliebige Dreieck ABC , dessen Winkel beim Punkte B in irgend einem Halbkreise mit AC als Durchmesser liegt, (nach Lehrsatz XV) der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels, die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels bedingt, je nachdem der Winkel beim Punkte B ein rechter, stumpfer oder spitzer ist. Was zu beweisen war.

Lehrsatz XIX. *Irgend ein Dreieck AHD (Fig. 18) sei in H rechtwinklig. Auf der Verlängerung von AD werde das Stück DC gleich AD*

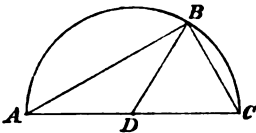


Fig. 17.

angenommen, und auf die Verlängerung von AH das Lot CB gefällt. Ich behaupte, daß hierdurch der Reihe nach die Hypothese des rechten Winkels, die des stumpfen oder die des spitzen Winkels bedingt wird, jenachdem das Stück HB gleich AH oder größer oder kleiner ist. 27

Beweis. Die Verbindungslinie DB wird nämlich (nach I. 4 und nach Lehrsatz X) gleich AD oder größer oder kleiner als AD oder DC sein, jenachdem jenes Stück HB gleich AH oder größer oder kleiner ist.

Es sei nun erstens HB gleich AH , sodafs also die Verbindungslinie DB gleich AD oder DC wird. Dann geht der Umfang des Kreises, der um D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DB beschrieben wird, sicher durch die Punkte A und C . Demnach liegt der Winkel ABC , welcher der Voraussetzung nach ein Rechter ist, in diesem Halbkreise, dessen Durchmesser AC ist, und hierdurch wird (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Hypothese des rechten Winkels bedingt. Was an erster Stelle zu beweisen war.

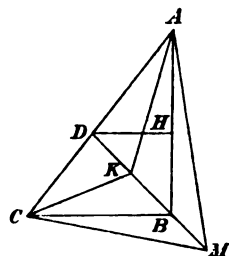


Fig. 18.

Es sei zweitens HB größer als AH , sodafs also die Verbindungslinie DB größer als AD oder DC ist. Dann wird der Umfang des Kreises, der um D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DA oder DC beschrieben wird, DB sicher in einem gewissen Zwischenpunkte K treffen. Demnach ist, wenn man AK und CK zieht, der Winkel AKC stumpf, denn er ist (nach I. 21) größer als der Winkel ABC , welcher, der Voraussetzung nach, ein Rechter ist, und hierdurch wird (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Hypothese des stumpfen Winkels bedingt. Was an zweiter Stelle zu beweisen war.

Es sei drittens HB kleiner als AH , sodafs also die Verbindungslinie DB kleiner als AD oder DC ist. Dann wird der Umfang des Kreises, der um D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DA oder DC beschrieben wird, die Verlängerung von DB sicher in einem Punkte M treffen. Demnach ist, wenn man AM und CM zieht, der Winkel AMC spitz, denn er ist (wieder nach I. 21) kleiner als der Winkel ABC , der ein Rechter sein sollte, und hierdurch wird (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) die Hypothese des spitzen Winkels bedingt. Was an dritter Stelle zu beweisen war.

Mithin ist die ganze Behauptung richtig.

Lehrsatz XX. Das Dreieck ACM (Fig. 19) sei in C rechtwinklig. 28
Wird dann vom Halbierungspunkte B der Geraden AM auf AC das

auf die Verlängerung von AC gefällt wird. Das heisst, das Lot, das man von der immer weiter verlängerten Geraden AM auf die Verlängerung von AC fällt, wird schliesslich ein Vielfaches der bestimmten Geraden BD , über jede endliche angebbare Zahl hinaus. Mithin wird (bei jeder der beiden genannten Hypothesen) der Abstand der genannten Geraden grösser als irgend eine angebbare endliche Länge. Was zu beweisen war.

Zusatz. Da die Hypothese des stumpfen Winkels, die allein hier hinderlich sein könnte, bereits als ganz und gar falsch erwiesen ist, so folgt nunmehr die unbedingte Richtigkeit des Satzes, dass der gegenseitige Abstand der genannten Geraden, sobald sie ins Unendliche verlängert werden, grösser als jede beliebige, endliche angebbare Länge wird.

Anmerkung I, worin der Versuch des Proklos geprüft wird.

Nachdem ich bis jetzt einige Theoreme ganz unabhängig von dem Euklidischen Axiom bewiesen habe, zu dessen durchaus strengem Beweise sie alle dienen sollen, glaube ich gut zu thun, wenn ich nunmehr die Bemühungen einiger bekannterer Geometer, die nach demselben Ziele gestrebt haben, sorgfältig prüfe.

Ich beginne mit Proklos, von dem sich bei Clavius hinter dem 30. Satze 28 des ersten Buches folgende Behauptung findet:

Gehen von einem Punkte zwei Gerade aus, die einen Winkel mit einander bilden, so wird ihr Abstand, wenn sie ins Unendliche verlängert werden, jede endliche Grösse überschreiten.

Proklos beweist nun (wie Clavius dort sehr gut bemerkt) zwar, dass zwei Gerade wie AH und AD (Fig. 20), die sich von demselben Punkte A nach derselben Seite erstrecken, um so mehr von einander absteigen, je grösser der Abstand vom Punkte A wird, nicht aber auch, dass dieser Abstand über jede endliche angebbare Grenze wächst, wie es doch für seinen Zweck erforderlich wäre.

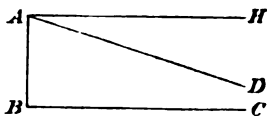


Fig. 20.

An dieser Stelle führt der eben erwähnte Clavius das Beispiel der Conchoide des Nikomedes an. Wenn sich diese nämlich von dem Punkte A aus nach derselben Seite erstreckt, wie die Gerade AH , so entfernt sie sich zwar von dieser immer mehr, jedoch so, dass ihr Abstand erst bei unendlicher Verlängerung beider gleich einer gewissen endlichen Geraden AB wird, die senkrecht steht auf den nach derselben Seite ins Unendliche verlängerten Geraden AH und BC . Warum könnte man also nicht, ausser wenn ein besonderer Grund das Gegenteil fordert, von den beiden angenommenen Geraden AH und AD dasselbe behaupten?

Man darf übrigens den Clavius nicht tadeln, daß er dem Proklos diese Eigenschaft der Conchoide entgegenhält, die nur mit Hilfe mehrerer, auf dem hier strittigen Axiom beruhender Theoreme bewiesen werden kann. Denn ich behaupte, daß gerade hierdurch die Kraft der Widerlegung des Clavius verstärkt wird. Nimmt man nämlich dieses Axiom als richtig an, so folgt augenscheinlich die Möglichkeit, daß zwei ins Unendliche verlängerte Linien, von denen die eine gerade, die andere gekrümmt ist, zwar immer mehr von einander abweichen, jedoch nur innerhalb einer bestimmten, endlichen Grenze; hieraus aber kann man jedenfalls Verdacht schöpfen, daß etwas ähnliches auch bei zwei geraden Linien eintreten kann, wofern nicht das Gegenteil bewiesen wird.

Man kann aber nicht etwa, nachdem ich in dem Zusatz zu dem
 31 vorhergehenden Lehrsatze die unbedingte Wahrheit der vorhin erwähnten Behauptung festgestellt habe, deshalb sofort dazu übergehen, jenes Euklidische Axiom als wahr hinzustellen. Vorher müßte nämlich noch bewiesen werden, daß jene beiden Geraden AH und BC , die mit der schneidenden Geraden AB auf derselben Seite zwei Winkel bilden, die zusammen gleich zwei Rechten sind, also etwa jeder gleich einem Rechten, nicht auch selber nach dieser Seite ins Unendliche verlängert immer mehr über jede endliche angebbare Entfernung hinaus auseinandergehen. Macht man nämlich die Annahme, daß dies eintritt, was bei der Hypothese des spitzen Winkels durchaus richtig ist, so ist es gewiß keine erlaubte Folgerung, daß eine Gerade AD , die den Winkel HAB irgendwie schneidet, wobei dann die beiden inneren Winkel an derselben Seite, DAB und CBA , zusammen kleiner als zwei Rechte sind, — daß, sage ich, diese Gerade AD , ins Unendliche verlängert, schließlic mit der Verlängerung von BC zusammentreffen muß, wenn auch anderweitig bewiesen ist, daß der Abstand der beiden ins Unendliche verlängerten Geraden AH und AD immer größer wird, und zwar über jede endliche angebbare Grenze hinaus.

Wenn aber der schon erwähnte Clavius glaubte, die Wahrheit jener Behauptung genüge zum Beweise des hier strittigen Axioms, so entschuldigt dies das Vorurteil, das er in Betreff gerader Linien von gleichem Abstände gefaßt hatte. Hierüber werden wir jedoch bequemer in der folgenden Anmerkung sprechen.

Anmerkung II, worin die Ansicht geprüft wird, die der berühmte Giovanni Alfonso Borelli in seinem *Euclides restitutus* ausgesprochen hat.

Dieser große Gelehrte klagt den Euklid an, weil er parallele

Linien als solche erklärt habe, *die in derselben Ebene liegen und auf keiner von beiden Seiten zusammentreffen, selbst wenn sie ins Unendliche verlängert werden* *). Als Grund für seine Anklage giebt er an, ein solches Verhalten sei unbekannt, einmal, sagt er, *weil wir nicht wissen*, 32 *ob es solche unendliche, nicht zusammentreffende Linien wirklich giebt, dann aber auch, weil wir die Eigenschaften des Unendlichen nicht fassen können, und daher ein solches Verhalten nicht deutlich bekannt ist.*

Mit der gebührenden Ehrfurcht vor einem so großen Manne sei es gesagt: kann man etwa Euklid tadeln, weil er (um ein Beispiel unter unzähligen anzuführen) *das Quadrat als eine viereckige, gleichseitige, rechtwinklige Figur erklärt hat* **), während man doch zweifeln kann, ob es in Wirklichkeit eine solche Figur giebt? Billig, sage ich, hätte man ihn tadeln können, wenn er die genannte Figur als gegeben angenommen hätte, ohne vorher in Form einer Aufgabe ihre Konstruktion nachzuweisen. Euklid ist aber von diesem Fehler frei, wie deutlich daraus hervorgeht, daß er das Quadrat nicht eher als an und für sich erklärt annimmt, als nach dem Satze 46 des ersten Buches, wo er in Form einer Aufgabe lehrt und zeigt, *wie man eben das Quadrat, das er erklärt hat, aus einer gegebenen Linie AB zeichnet.*

Ebenso wenig darf man also Euklid tadeln, weil er die parallelen geraden Linien auf die angegebene Art erklärt hat, da er sie nicht eher bei irgend einer Aufgabe in der Konstruktion als gegeben annimmt, als nach dem Satze 31 des ersten Buches, wo er in Form einer Aufgabe zeigt, *wie durch einen außerhalb einer Geraden angenommenen Punkt die ihr parallele gerade Linie zu ziehen ist*, und zwar gemäß der von ihm gegebenen Erklärung der Parallelen, *wonach sie, bis ins Unendliche verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen.* Und was mehr ist, gerade das zeigt er ohne die geringste Benutzung des hier strittigen Axioms. Mithin zeigt Euklid ohne jeden Zirkelschluss, *daß es in Wirklichkeit zwei gerade Linien giebt, die (in derselben Ebene liegen und) nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert niemals zusammentreffen*, und dadurch giebt er uns eine klare Erkenntnis von dem Verhalten, durch das er parallele Linien erklärt.

Gehen wir weiter, wohin uns der gewissenhafte Ankläger Euklids führt. Parallele gerade Linien nennt er irgend zwei gerade Linien AC und BD , die auf derselben Seite (bei mir Fig. 21 ***) auf einer Ge- 33 raden AB senkrecht stehen. Ich gebe zu, daß diese Erklärung auf einem, wie er selbst sagt, möglichen und sehr deutlichen Verhalten

*) [Euklid, Elemente, Buch I, Erklärung 23.]

**) [Euklid, Elemente, Buch I, Erklärung 22.]

***) [Dieselbe Figur hat Clavius schon 1574, Giordano da Bitonto 1680.]

beruht, da man ja (nach I. 11) auf einer gegebenen Geraden in jedem Punkte das Lot errichten kann.

Ich habe jedoch bewiesen, daß eben diese Möglichkeit und Deutlichkeit auch der Erklärung Euklids zukommt. Es bleibt daher nur übrig, jenes bekannte Axiom Euklids mit dem andern neuen Axiome zu vergleichen, das man notwendig braucht, wenn man nach jener neuen Erklärung der Parallelen weiter gehen will. In der That befindet sich dieses andere Axiom bei Clavius (auf den sich Borelli ausdrücklich beruft) in der Anmerkung hinter I. 28:

Bewegt sich eine gerade Linie, zum Beispiel BD [Fig. 21], längs einer andern Geraden, zum Beispiel BA, und bildet sie dabei in ihrem Endpunkte B immer rechte Winkel [mit BA], so wird ihr anderer Endpunkt D auch eine Gerade DC beschreiben, wenn nämlich BD schliesslich zur Deckung mit der andern gleich grossen Geraden AC gelangt.

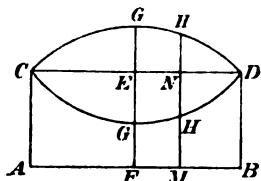


Fig. 21.

Ich erkenne an, daß es möglich ist, von diesem Axiome aus zum Beweise jenes andern, Euklidischen Axioms überzugehen, auf das man schliesslich die ganze übrige Geometrie stützen muß. Denn Clavius hatte vorher als Lehrsatz aufgestellt, daß eine Linie, deren Punkte sämtlich von einer angenommenen Geraden AB gleich weit abstehen, und von dieser Beschaffenheit ist ja (grade nach der Voraussetzung der erwähnten Konstruktion) die Linie DC , auch ihrerseits gerade sein muß, weil sie so beschaffen ist, daß alle ihre Zwischenpunkte zwischen ihren Endpunkten D und C auf einerlei Art liegen (das ist eben die Erklärung der geraden Linie*)); auf einerlei Art liegen, sage ich, da sie alle von der angenommenen Geraden AB gleich weit abstehen, nämlich um die Länge von BD oder AC .

An dieser Stelle führt Clavius als Beispiel die Kreislinie an, über die wir aber besser weiter unten sprechen werden; dort werde ich
34 ins hellste Licht setzen, wodurch sich die gerade Linie und die kreisförmige in dieser Beziehung unterscheiden.

Inzwischen sage ich nur, daß es nicht genügend einleuchtet, ob die von jenem Punkte D beschriebene Linie wirklich die Gerade DC ist, und nicht vielmehr eine gewisse Kurve DGC , die nach der Seite von BA gewölbt oder hohl sein kann.

*) [Euklid, Elemente, Buch I, Erklärung 4:
 Ἐὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου | Recta linea est, quaecunque ex aequo
 τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κείται. | punctis in ea sitis iacet.]

Denkt man sich nämlich in dem Halbierungspunkte F von AB die Senkrechte errichtet, welche die Gerade DC in E , die genannten Curven in G und G trifft, so sind (nach Lehrsatz II) die Winkel zu beiden Seiten des Punktes E sicher rechte, wofern man sich bei jener Bewegung des Punktes D die Linie DC beschrieben denkt, und es sind außerdem (vermöge einer leicht verständlichen Aufeinanderlegung*) die Winkel zu beiden Seiten der Punkte G einander gleich, falls die eine oder die andere Curve DGC beschrieben worden sein sollte.

Nimmt man wiederum auf AB irgend einen Punkt M an und errichtet die Senkrechte, welche die Gerade DC in N und die genannten Linien in H und H treffen möge, so werde ich etwas später beweisen, daß die Winkel zu beiden Seiten des Punktes N rechte werden, sobald man voraussetzt, daß der Punkt D bei seiner Bewegung eben die Gerade DC erzeugt, oder sobald man annimmt, daß die Gerade MN gleich BD sei. Ist man aber der Ansicht, daß eine der beiden Linien DHC erzeugt wird, so beweist man mittelst derselben soeben vorgeschriebenen leichten Aufeinanderlegung, daß wieder auf beiden Seiten die Winkel MHD und MHC gleich werden, gleichgültig, wo man auf einer der beiden beschriebenen Linien den Punkt H annimmt, von dem aus man sich auf die Grundlinie AB das Lot HM gefällt denkt. Hierüber jedoch Ausführlicheres und Genaueres im zweiten Teile dieses Buches, wohin es besser paßt.

Wozu denn, wird man fragen, diese unzeitige Vorwegnahme? Zu dem Zwecke, entgegne ich, damit man nicht aus dieser Eigenschaft der so erzeugten Linie — einer Eigenschaft, die zweifellos ist, und von der ich am angeführten Orte aufs Strengste beweisen werde, daß sie ohne irgend welche unendlich kleine Abweichung gilt — den voreiligen Schluß ziehe, diese Linie könne nur die Gerade sein. Hier handelt es sich nämlich um eine tiefere Erkenntnis der Beschaffenheit der geraden Linie, ohne welche die Geometrie, kaum den Kinderschuhen entwachsen, an dieser Stelle stehen bleiben müßte. Demnach 35 darf man es bei einer solchen Angelegenheit nicht tadeln, wenn die Wahrheit auf das Genaueste ergründet wird.

Und doch leugne ich hier nicht, daß man durch sorgfältige physikalische Versuche feststellen kann, die auf jene Weise erzeugte Linie DC könne nur für eine gerade Linie erklärt werden. Damit ich mich aber hier überhaupt auf physikalische Versuche berufen darf, will ich sofort drei physikalisch-geometrische Beweise zur Erhärtung des Euklidischen Axioms beibringen.

*) [Im Original: *superpositio*. Gemeint ist die Umklappung der Figur um die Gerade FG ; vergl. auch die Anmerkung S. 55.]

Dabei rede ich von keinem physikalischen Versuch, der sich ins Unendliche erstreckt und uns deshalb unmöglich ist, wie er erforderlich wäre, um zu erkennen, daß die Punkte der Verbindungsgeraden DC sämtlich gleich weit von der Geraden AB abstehen, die nach der Voraussetzung mit DC in derselben Ebene liegt. Mir wird ein einziger besonderer Fall genügen, zum Beispiel, wenn man die Gerade DC zieht [Fig. 21], auf ihr irgend einen Punkt N annimmt, und es sich dann herausstellt, daß das auf die Grundlinie AB gefällte Lot gleich BD oder AC ist. Dann wären nämlich die Winkel zu beiden Seiten des Punktes N (nach Lehrsatz I) gleich den einander entsprechenden Winkeln an den Punkten C und D , die ihrerseits (wieder nach Lehrsatz I) einander gleich wären. Deshalb werden die Winkel zu beiden Seiten des Punktes N und somit auch die beiden übrigen rechte sein. Folglich werden wir einen Fall für die Hypothese des rechten Winkels bekommen, und haben damit (nach Lehrsatz V und XIII) das Euklidische Axiom bewiesen. Dies möge der erste physikalisch-geometrische Beweis sein.

Ich gehe zum zweiten über. Es werde ein Halbkreis angenommen mit D als Mittelpunkt und AC als Durchmesser. Wenn nun (Fig. 17)

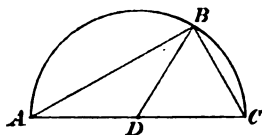


Fig. 17.

auf dem Umfange irgend ein Punkt B gewählt wird, und sich herausstellt, daß die nach ihm gezogenen Geraden AB und CB einen rechten Winkel einschließen, so genügt dieser einzige Fall (wie ich in Lehrsatz XVIII bewiesen habe), um die Hypothese des rechten

Winkels zu bedingen, und deshalb (nach dem eben erwähnten Lehrsatz XIII), um jenes bekannte Axiom zu beweisen.

36 Es bleibt der dritte physikalisch-geometrische Beweis übrig, den ich für den allerwirksamsten und einfachsten halte. Denn ihm liegt

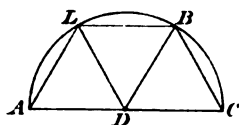


Fig. 22.

ein jedem zugänglicher, sehr leichter und höchst bequemer Versuch zu Grunde. Legt man nämlich in einem Kreise, der den Mittelpunkt D hat (Fig. 22), drei gerade Linien CB , BL und LA an einander, jede gleich dem Halbmesser DC , und stellt es sich heraus, daß die Verbindungsgerade AC durch den Mittelpunkt D geht, so wird dies zum Beweise der Behauptung genügen.

Ziehen wir nämlich DB und DL , so werden wir drei Dreiecke bekommen, die (nach I. 8 und 5) sowohl untereinander als auch jedes für sich lauter gleiche Winkel besitzen. Da nun die drei Winkel am Punkte D , nämlich ADL , LDB und BDC (nach I. 13) zusammen gleich zwei Rechten sind, so sind auch die drei Winkel jedes dieser

Dreiecke zusammen gleich zwei Rechten, zum Beispiel die des Dreiecks BDC . Dadurch wird aber (nach Lehrsatz XV) die Hypothese des rechten Winkels bedingt, und daher wird (nach dem schon benutzten Lehrsatz XIII) jenes Axiom bewiesen sein.

Wenn man aber, ohne einen Beweis oder eine Darstellung durch Zeichnung zu versuchen, jene beiden Axiome mit einander vergleichen will, dann gestehe ich, daß allerdings das Euklidische dunkler oder sogar fehlerhaft erscheinen kann. Aber nach der Darstellung durch Zeichnung, die ich für die spätere Anmerkung IV aufspare, wird man sehen, daß grade umgekehrt das Axiom Euklids die Würde und den Namen eines Axioms behalten kann, während man besser thut, das andre unter die Lehrsätze zu rechnen.

Hier muß ich aber (was zu thun ich vor Kurzem versprochen habe) den augenfälligen Unterschied auseinandersetzen, der in dieser Beziehung zwischen der kreisförmigen und der geraden Linie besteht. Dieser Unterschied entspringt daraus, daß eine Linie gerade heißt in Bezug auf sich selbst, kreisförmig aber, wie zum Beispiel $MDHNM$ (Fig. 23), nicht in Bezug auf sich selbst, sondern in Bezug auf etwas andres, nämlich auf einen gewissen andern Punkt A , der mit ihr in derselben Ebene liegt: ihren Mittelpunkt.

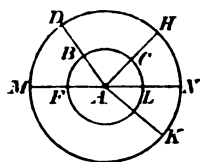


Fig. 23.

Hieraus folgt, wie Clavius vortrefflich beweist, daß die Linie $FBCL$, die in derselben Ebene liegt wie jene, und deren Punkte sämtlich von der genannten Linie $MDHNM$ gleich weit abstehen, auch ihrerseits kreisförmig ist, das heißt, in allen ihren Punkten von dem gemeinsamen Mittelpunkte A gleichen Abstand hat. Daß nämlich BD , die geradlinige Verlängerung von AB , das Maß des Abstandes jenes Punktes B von dieser Kreislinie $MDHNM$ ist, weiß man daher, daß sie (nach III. 7*), was von dem hier strittigen Axiome unabhängig ist) die kleinste von allen Geraden ist, die von diesem Punkte aus nach jenem Umfange gezogen werden können. Dasselbe gilt von den übrigen Geraden CH , LN und FM . Da nun auch die ganzen Geraden AM , AD und AH als Halbmesser vom Mittelpunkte A nach der angenommenen Kreislinie $MDHNM$ gleich sind, und da ebenso die Abschnitte FM , BD , CH und LN gleich sind, weil sie das Maß des gleichen Abstandes aller Punkte jener Linie $FBCLF$ von der angenommenen Kreislinie $MDHNM$ darstellen, so folgt offenbar, daß die übrigbleibenden Stücke AF , AB , AC und AL ebenfalls

*) [Vergleiche die Anmerkung auf Seite 50.]

gleich sind, und daß deshalb auch die Linie $FBCLF$ eine Kreislinie um denselben Mittelpunkt ist.

Wird denn aber, um zu beweisen, daß die durch eine solche Bewegung von dem Punkte D erzeugte Linie DC (Fig. 21) eine gerade Linie ist, in derselben Weise der gleiche Abstand aller ihrer Punkte von der zu Grunde gelegten Geraden AB genügen? Keineswegs. Denn eine Linie heißt gerade durchaus in Bezug auf sich selbst oder an sich selbst, weil sie nämlich in der Weise *auf einerlei Art zwischen ihren Punkten liegt*, und namentlich zwischen ihren Endpunkten, daß sie, wenn diese unbewegt bleiben, durch eine Drehung niemals eine neue Lage annehmen kann*). Wenn man dieses Verhalten nicht auf irgend eine Art für jene Linie DC nachweist, kann man nicht sicher sein, daß sie eine Gerade ist, was man auch sonst über die Beziehung aller ihrer Punkte zu der in derselben Ebene liegenden Geraden AB annehmen oder beweisen mag. Namentlich aber dürfen wir nicht in gleicher Weise sagen, daß in jener Ebene eine Linie $[DC]$ sicher dann eine Gerade ist, wenn sie in allen ihren Punkten von der als Gerade angenommenen Linie AB den gleichen Abstand hat.

38 Man darf aber meine Worte nicht so auffassen, als ob ich glaubte, es liefse sich nicht zeigen, daß die so erzeugte Linie $[DC]$ selbst eine gerade Linie ist, bevor man die Wahrheit des strittigen Axioms bewiesen hat, da ich vielmehr grade vorhabe, gegen das Ende des ersten Buches das zu beweisen, um dadurch eben dieses Axiom zu bekräftigen.

Anmerkung III, worin der Versuch des Arabers Nassaradin und zugleich die Ansicht des berühmten John Wallis über dieselbe Frage geprüft wird.

Diesen Versuch des Arabers Nassaradin hat der schon angeführte John Wallis in lateinischer Sprache durch den Druck veröffentlicht mit Anmerkungen, die er an passender Stelle hinzugefügt hat. Und zwar verlangt Nassaradin, dass man ihm für sein Unternehmen zweierlei zugestehe.

Erstens, daß irgend zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien, auf die irgend welche andre gerade Linien so treffen, daß sie immer auf einer von ihnen senkrecht stehen, die andre aber immer unter ungleichen Winkeln schneiden, nämlich auf der einen Seite stets unter einem spitzen Winkel und auf der andern Seite

*) [Saccheri deutet *Euklids* Erklärung der Geraden in einer Weise, die diesem durchaus fern gelegen hat, da er ja den Begriff der Bewegung sorgfältig vermeidet.]

stets unter einem stumpfen Winkel, dafs, sage ich, die eben erwähnten Geraden, so lange sie einander nicht schneiden, auf der Seite der spitzen Winkel einander immer näher kommen sollen und umgekehrt auf der Seite der stumpfen Winkel immer mehr auseinandergehen.

Wenn ihm sonst nichts Schwierigkeiten macht, so gestehe ich meines Theils gern zu, was Nassaradin fordert, denn grade-das, was bei ihm unbewiesen bleibt, habe ich, wie man erkennt, in dem Zusatze II hinter Lehrsatz III aufs Strengste bewiesen.

Die zweite Forderung Nassaradins ist die Umkehrung der ersten, es soll nämlich der Winkel immer spitz sein auf der Seite, wo die schon erwähnten Lote der Annahme nach immer kürzer werden, 39 stumpf aber auf der andern Seite, wo der Annahme nach dieselben Lote immer länger werden.

Hierin steckt aber eine Zweideutigkeit. Denn warum sollen (wenn man von einem Lote, das man als erstes angenommen hat, zu den andern fortschreitet) die Winkel der folgenden Lote, die alle auf derselben Seite spitz sind, nicht immer gröfser werden, bis man auf einen rechten Winkel trifft, also auf ein Lot, welches das gemeinsame Lot der beiden genannten Geraden ist? Und wenn das eintritt, da werden die listigen Zurüstungen des Nassaradin zu nichts, vermittelst deren er recht scharfsinnig, jedoch mit grofser Mühe Euklids Axiom beweist.

Wenn es nun Nassaradin mit einer gewissen Berechtigung als selbstverständlich hinstellen sollte, dafs die Winkel immer auf derselben Seite spitz bleiben, warum kann man dann nicht auch (ich spreche mit Wallis) als an und für sich einleuchtend annehmen, dafs *zwei Gerade, die in derselben Ebene liegen und sich einander nähern, wenn sie verlängert werden, endlich zusammentreffen müssen?* (Damit meine ich zwei Gerade, mit denen eine schneidende Gerade an derselben Seite zwei Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, zum Beispiel einen rechten und einen beliebigen spitzen.)

Man darf nämlich auch nicht einwenden, dafs jene Annäherung auf der einen Seite immer innerhalb einer gewissen bestimmten Grenze bleiben könne, sodafs also die beiden Linien auf dieser Seite immer einen Abstand von gewisser Gröfse von einander behielten, obgleich im Übrigen die eine der andern immer näher kommt. Das darf man nicht einwenden, sage ich, weil ich grade daraus [in dem Zusatze I] hinter Lehrsatz XXV beweisen werde, dafs alle solchen geraden Linien, gemäfs dem Euklidischen Axiome, in endlicher Entfernung zusammentreffen.

Ich wende mich nunmehr zu dem schon erwähnten John Wallis, der, um soviel grofsen Männern, alten sowohl als neueren, zu will-

40 fahren und außerdem, weil seinem Lehrstuhle in Oxford diese Verpflichtung auferlegt war, ebenfalls die Aufgabe in Angriff nahm, das oft genannte Axiom zu beweisen. Dabei nimmt er einzig und allein Folgendes als sicher an, daß nämlich *zu jeder gegebenen Figur eine ähnliche von beliebiger Größe möglich sei*. Daß man dies von jeder Figur voraussetzen dürfe (obwohl er für seinen Zweck nur das geradlinige Dreieck benützt), begründet er gut mit dem Kreise, den man, wie jeder zugiebt, mit beliebigem Halbmesser beschreiben kann. Ferner bemerkt der scharfsinnige Mann sehr vorsichtig, dieser seiner Voraussetzung stehe nicht entgegen, daß außer der Gleichheit entsprechender Winkel auch die Proportionalität aller entsprechenden Seiten gefordert werde, damit eine geradlinige Figur, zum Beispiel eine dreieckige, einer andern geradlinigen, dreieckigen ähnlich sei, da ja die Erklärung der Proportionen und damit die der ähnlichen Figuren aus dem fünften und sechsten Buche Euklids zu entnehmen sei. *Denn Euklid hätte* (so sagt er selbst) *beide dem ersten Buche vorausschicken können*. Nachdem dies feststeht (was man freilich leugnen könnte, so lange es nicht bewiesen ist), führt er sein Unternehmen mit wirklich schönen und scharfsinnigen Bemühungen zu Ende.

Aber ich will es bei dem von mir unternommenen Geschäfte an nichts fehlen lassen. Daher nehme ich zwei Dreiecke an, das eine ABC

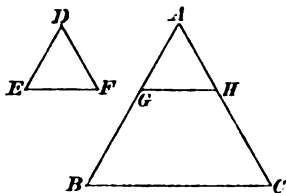


Fig. 24.

und das andere DEF (Fig. 24), beide mit denselben Winkeln. Ich sage nicht geradezu ähnliche Dreiecke, denn ich habe die Proportionalität der Seiten an gleichen Winkeln gar nicht nötig, und nicht einmal ein bestimmtes Maß der Seiten. Ich will nur nicht, daß die Dreiecke gleiche Seiten haben,

denn sonst genügt schon I. 8, ohne jede weitere Voraussetzung.

Es seien also die Winkel an den Punkten A, B, C der Reihe nach gleich den Winkeln an den Punkten D, E, F . Ferner sei die Seite DE kleiner als die Seite AB , und man nehme auf AB ein Stück AG an gleich DE und ebenso auf AC ein Stück AH gleich DF ; daß aber DF kleiner als AC sein muß, werde ich nachher zeigen. Dann sind, wenn man GH zieht, die Winkel an den Punkten
 41 E und F (nach I. 4) gleich AGH und AHG . Da nun die eben genannten Winkel zusammen mit den andern BGH und CHG (nach I. 13) gleich vier Rechten sind, so sind die Winkel bei B und C zusammen mit denselben Winkeln BGH und CHG ebenfalls gleich vier Rechten. Mithin sind die vier Winkel des Vierecks $BGHC$ zusammen gleich vier Rechten, und dadurch wird (nach Lehrsatz XVI) die Hypothese des

einen Winkel mit dem Abschnitte PY zu bilden, sodaß also die beiden Geraden APY und XPY auf diese Art einen Abschnitt gemeinsam hätten. Das widerstrebt aber augenscheinlich der Natur der geraden Linie*).

Wer aber den stumpfen Winkel bei jenem Punkte X auf der Seite des Punktes A unbequem findet, der darf ihn ohne Weiteres als rechten voraussetzen, sodaß (da die erwähnte Gerade XY sich immer unter rechtem Winkel längs der Geraden AZ bewegt) noch deutlicher erhellt, wie die Punkte von XY sich gleichmäfsig in Bezug auf die Grundlinie AZ bewegen, und daß deshalb die schon erwähnte Gerade XY nicht aus einer, welche die andere unbegrenzte Gerade AY schneidet, in eine nicht schneidende übergehen kann, ohne sie entweder einmal in einem Punkte genau zu berühren oder sie in einem Punkte P zu treffen, wo sie mit AY einen Abschnitt PY gemeinsam hat. Daß aber dieses beides der Natur der geraden Linie entgegen ist, werde ich bei dem Lehrsatz XXXIII zeigen.

Mithin muß dem wahren Begriffe der geraden Linie zufolge jene Gerade XY bei beliebigem Abstände des Punktes X vom Punkte A die Gerade AY immer in einem gewissen Punkte treffen. Und daß eben dies (wie klein auch der spitze Winkel beim Punkte A angenommen wird) genügt, um, entgegen der Hypothese des spitzen Winkels, das Euklidische Axiom zu beweisen, das wird aus Lehrsatz XXVII hervorgehen.

Lehrsatz XXII. *Stehen zwei Gerade AB und CD , die in derselben Ebene liegen, auf einer Geraden BD senkrecht, und bildet die Verbindungslinie AC dieser Lote spitze innere Winkel mit ihnen (bei der Hypothese des spitzen Winkels), so behaupte ich (Fig. 26), 44 daß die beiden begrenzten Geraden AC und BD ein gemeinsames Lot besitzen, und zwar innerhalb der Grenzen, die durch die gegebenen Punkte A und C festgelegt sind.*

Beweis. Sind nämlich AB und CD gleich, so steht (nach Lehrsatz II) die Gerade LK , die AC und BD beide halbiert, sicher auf beiden gleichzeitig senkrecht.

Ist aber eine von beiden größer, zum Beispiel AB , so fälle man auf BD (nach I. 12) aus einem Punkte L von AC das Lot LK , das die andere BD in K treffe. Dieses wird sie dann in einem Punkte K treffen, der zwischen den Punkten

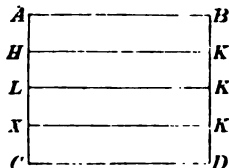


Fig. 26.

*) [Hier ist die Möglichkeit übersehen, daß der Punkt P ins Unendliche fällt, und dann kommt man auf keinen Widerspruch.]

B und D liegt, denn sonst schnitte das Lot LK (gegen I. 17) eine der beiden Geraden AB oder CD , die gleichfalls auf BD senkrecht stehen. Sind nun die Winkel an dem Punkte L keine rechten, so ist der eine von ihnen spitz und der andre stumpf. Es liege der stumpfe auf der Seite des Punktes C .

Jetzt denke man sich die Gerade LK derart nach AB hin bewegt, daß sie immer auf BD senkrecht steht und zugleich, geeignet vergrößert oder verkleinert, die Gerade AC in einem ihrer Punkte schneidet. Die Winkel an den Schnittpunkten mit AC können auf der Seite von C sicher nicht alle stumpf sein, sonst wäre schließlich auch in dem Punkte A , wo die Geraden LK und AB einander decken, der Winkel am Punkte A auf der Seite von C stumpf, während er doch auf dieser Seite, nach der Annahme, spitz ist. Da nun vorausgesetzt wurde, daß der Winkel von LK beim Punkte L auf der Seite von C stumpf sei, so kann die Gerade LK bei ihrer Bewegung nicht dazu übergehen, in einem ihrer Punkte auf der Seite des genannten Punktes C einen spitzen Winkel mit der Geraden AC zu bilden, ohne vorher in einem ihrer Punkte auf der Seite desselben Punktes C mit AC einen rechten Winkel gebildet zu haben. Es giebt also zwischen den Punkten A und L einen gewissen Zwischenpunkt H , wo die auf BD senkrecht stehende Gerade HK auch auf der andern AC senkrecht steht*).

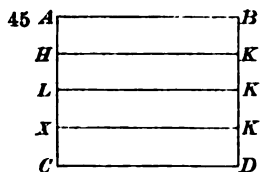


Fig. 26.

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß es eine Gerade XK zwischen LK und CD giebt, die sowohl auf der Geraden BD als auch auf der Geraden AC senkrecht steht, wenn nämlich vorausgesetzt wird, daß der stumpfe Winkel bei L auf der Seite von A liegt. Die Geraden AC und BD haben also sicher ein gemeinsames Lot, und zwar innerhalb der durch die gegebenen Punkte A und C festgelegten Grenzen, sobald die Verbindungsgeraden AB und CD in derselben Ebene liegen und auf BD senkrecht stehen [und mit AC spitze innere Winkel bilden]. Was zu beweisen war.

Lehrsatz XXIII. *Liegen irgend zwei Gerade AX und BX^{**}) (Fig. 27) in derselben Ebene, so haben sie (auch bei der Hypothese*

*) [Auch hier macht Saccheri von dem Axiome der stetigen Änderung Gebrauch; man vergleiche die Anmerkung S. 56.]

**) [An dieser Stelle benutzt Saccheri denselben Buchstaben, X , wohl deshalb zweimal, weil er in dem Falle, wo die beiden Geraden AD und BK einander treffen, X als ihren Schnittpunkt auffaßt.]

des spitzen Winkels) entweder ein gemeinsames Lot oder sie müssen, wenn man sie nach einer gewissen, aber beide nach derselben Seite verlängert, entweder einmal in endlicher Entfernung zusammentreffen oder wenigstens einander immer näher kommen.

Beweis. Aus irgend einem Punkte A von AX fälle man auf die Gerade BX das Lot AB . Wenn BA mit AX einen rechten Winkel bildet, haben wir den behaupteten Fall des gemeinsamen Lotes. Sonst aber wird diese Gerade auf einer von beiden Seiten, zum Beispiel auf der des Punktes X , einen spitzen Winkel bilden. Dann wähle man auf der genannten Geraden AX zwischen den Punkten A und X irgend welche Punkte D, H, L und fälle von diesen auf die Gerade BX die Lote DK, HK, LK .

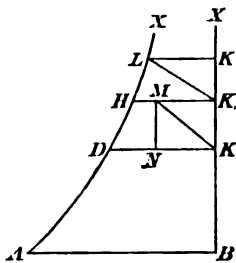


Fig. 27.

Ist einer der Winkel bei den Punkten D, H, L auf der Seite des Punktes A spitz, so giebt es (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) sicher ein gemeinsames Lot von AX und BX . Wenn aber jeder dieser Winkel größer als ein spitzer ist, so ist entweder einer ein rechter, und dann haben wir wiederum den Fall des gemeinsamen Lotes, da alle Winkel bei den Punkten K als rechte angenommen sind, oder es müssen alle jene Winkel auf der Seite von A stumpf, und somit auf der Seite von X spitz sein. Dann schliesse ich wieder so:

Da in dem Viereck $KDHK$ die Winkel bei den Punkten K rechte sind, der Winkel beim Punkte D aber spitz sein soll, so ist ⁴⁶ (nach Zusatz II hinter Lehrsatz III) die Seite DK größer als die Seite HK . Auf ähnliche Art zeigt man, daß die Seite HK größer ist als die Seite LK , und so geht es immer weiter, wenn man die Lote mit einander vergleicht, die aus immer weiter hinauf liegenden Punkten von AX auf die andre Gerade BX gefällt sind. Deshalb werden sich AX und BX auf der Seite des Punktes X einander immer mehr nähern, und dies ist die zweite unter den beiden Möglichkeiten unsers Lehrsatzes.

Nach alledem ist sicher, daß irgend zwei Gerade AX und BX , die in derselben Ebene liegen, entweder (auch bei der Hypothese des spitzen Winkels) ein gemeinsames Lot besitzen, oder, wenn man sie nach einer gewissen, aber beide nach derselben Seite verlängert, entweder einmal in endlicher Entfernung zusammentreffen oder wenigstens einander immer näher kommen müssen. Was zu beweisen war.

Zusatz I. Hiernach sind bei jedem Punkte von AX , von dem aus man das Lot auf die Gerade BX fällt, die Winkel auf der Seite

der Grundlinie AB immer stumpf; sie sind immer stumpf, wiederhole ich, so oft sich jene beiden Geraden AX und BX auf der Seite der Punkte X einander immer mehr nähern. Das muß man richtig auffassen, es sind nämlich die Lote zu nehmen, die vor dem erwähnten Zusammentreffen gefällt sind, falls etwa die eine Gerade die andre in endlichem Abstände treffen sollte.

Anmerkung. Ich sehe freilich, daß hier noch die Frage offen

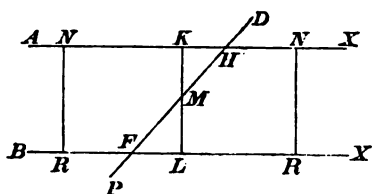


Fig. 28.

bleibt, auf welche Weise man das Vorhandensein jenes gemeinsamen Lotes zeigen soll, wenn irgend eine Gerade $PFHD$ (Fig. 28), welche die beiden Geraden AX und BX in den Punkten F und H trifft, auf derselben Seite zwei innere Winkel AHF und BFH

47 bildet, die zwar keine rechten, aber zusammen gleich zwei Rechten sind. Hier folgt deshalb eine geometrische Herleitung dieses gemeinsamen Lotes.

Man halbiere FH in M und fälle auf AX und BX die Lotē MK und ML . Der Winkel MFL ist (nach I. 13) gleich dem Winkel MHK , der ja nach der Voraussetzung mit dem Winkel BFH zwei Rechte ausmacht. Außerdem sind die Winkel an den Punkten K und L rechte, und endlich sind MF und MH gleich. Also sind (nach I. 26) auch die Winkel FML und HMK gleich. Deshalb ist der Winkel HMK zusammen mit dem Winkel HML gleich zwei Rechten, da (nach I. 13) der Winkel FML mit diesem zusammen gleich zwei Rechten ist. Folglich ist KML (nach I. 14) eine zusammenhängende gerade Linie und mithin für die genannten Geraden AX und BX das gemeinsame Lot. Was zu beweisen war.

Zusatz II. Hieraus kann ich wieder beweisen, daß jene beiden Geraden AX und BX , mit denen die schneidende Gerade $PFHD$ entweder auf derselben Seite zwei innere Winkel bildet, die zusammen gleich zwei Rechten sind, oder, was daraus (nach I. 13 und 15) folgt, gleiche äußere oder innere Wechselwinkel, oder auch, aus demselben Grunde, einen äußeren (zum Beispiel DHX), der gleich ist dem inneren gegenüberliegenden HFH , daß, sage ich, jene beiden Geraden auch bei der Verlängerung ins Unendliche nicht zusammentreffen können.

Wenn man nämlich aus irgend einem Punkte N von AX auf BX das Lot NR fällt, so wird dieses bei der Hypothese des spitzen Winkels (die uns ja allein hinderlich sein kann) größer als das gemeinsame Lot KL (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III). Daher

können jene beiden Geraden AX und BX niemals mit einander zusammentreffen.

Ferner haben wir hiermit die Lehrsätze 27 und 28 des ersten Buches von Euklid bewiesen, und zwar ohne die vorhergehenden Lehrsätze 16 und 17 desselben ersten Buches in ihrer vollen Allgemeinheit zu benutzen. Bei diesen könnte nämlich eine Schwierigkeit entstehen, 48 wenn sich über einer endlichen Grundlinie ein Dreieck mit unendlich grossen Seiten befände, und auf ein solches Dreieck würde sich mit Recht berufen, wer glaubt, daß jene Geraden AX und BX wenigstens in unendlich grosser Entfernung zusammentreffen, selbst wenn die Winkel bei der schneidenden Geraden $PFHD$ so beschaffen sind, wie wir sie voraussetzten.

Übrigens können wegen des Nachweises eines gemeinsamen Lotes KL die beiden Geraden KX und LX auf der Seite der Punkte X sicher nicht zusammenlaufen, da sonst (wegen einer leicht verständlichen Aufeinanderlegung) zugleich auf der andern Seite die übrigen bleibenden unbegrenzten Geraden KA und LB zusammenliefen und infolgedessen die Geraden AX und BX einen Raum einschliessen, was gegen die Natur der geraden Linie ist.

Doch darauf kommen wir später zurück. Denn im Vorhergehenden habe ich I. 16 und 17 nur dann angewandt, wenn es sich augenscheinlich um ein vollständig begrenztes Dreieck handelte, wofür Sorge zu tragen ich in dem Vorwort an den Leser versprochen hatte.

Lehrsatz XXIV. *Unter denselben Voraussetzungen*) behaupte ich, daß die vier Winkel (Fig. 27) des der Grundlinie AB näheren Vierecks $KDHK$ (bei der Hypothese des spitzen Winkels) zusammen kleiner sind, als die vier Winkel des von derselben Grundlinie entfernteren Vierecks $KHLK$, und zwar gilt das sowohl, wenn die beiden Geraden AX und BX einmal in endlicher Entfernung auf der Seite der Punkte X zusammentreffen, als auch, wenn sie einander niemals treffen, vielmehr auf jener Seite entweder einander mehr und mehr näher kommen, oder einmal ein gemeinsames Lot erhalten, von dem aus sie ja doch (nach Zusatz II zu dem vorhergehenden Lehrsatz) nach eben dieser Seite auseinanderzugehen anfangen.*

Beweis. Hier setzen wir jedoch voraus, daß die Stücke KK einander gleich gewählt sind. Da nun (nach dem Vorhergehenden) die 49 Seite DK gröfser ist als die Seite HK und ebenso HK gröfser ist als die Seite LK , so nehme man auf HK ein Stück MK gleich LK

*) [Nämlich wie beim Beweise des Lehrsatzes XXIII für den Fall, daß die Winkel ADK , AHK , und so weiter alle stumpf sind.]

und auf DK ein Stück NK gleich HK und verbinde M mit N , M mit K und L mit K , nämlich den mittelsten Punkt K mit dem Punkte L und den B näheren Punkt K mit dem Punkte M . Jetzt verfare ich so:

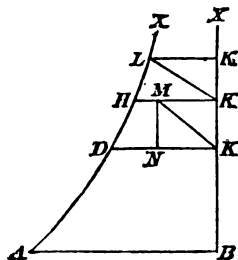


Fig. 27

Da ja die Seiten des Dreiecks KKL (ich werde immer mit dem Punkte K beginnen, der näher an B liegt) den Seiten des Dreiecks KKM gleich sind und auch die eingeschlossenen Winkel gleich sind, nämlich rechte, so sind (nach I. 4) auch die Grundlinien LK und MK gleich, und ebenso sind die einander entsprechenden Winkel an diesen Grundlinien gleich, also der Winkel KLK dem Winkel KMK und der Winkel LKK dem Winkel MKK . Folglich sind auch die Reste NKM und HKL gleich. Da ferner ebenso die Seiten NK und KM des Dreiecks NKM den Seiten HK und KL des Dreiecks HKL gleich sind, so sind (wieder nach I. 4) auch die Grundlinien NM und HL , die Winkel KNM und KHL und endlich die Winkel KMN und KLH gleich. Es wurde aber schon bei den früheren Dreiecken nachgewiesen, daß die Winkel KLK und KMK gleich sind. Mithin ist der ganze Winkel NMK gleich dem ganzen Winkel HLK . Deshalb folgt offenbar, da alle Winkel bei den Punkten K rechte sind, daß die vier Winkel des Vierecks $KNMK$ zusammen den vier Winkeln des Vierecks $KHLK$ gleich sind. Weil aber (nach dem Zusatze hinter Lehrsatz XVI) die beiden Winkel an den Punkten N und M in dem Viereck $KNMK$ bei der Hypothese des spitzen Winkels zusammen größer sind, als die beiden Winkel des Vierecks $NDHM$ oder des Vierecks $KDHK$ bei D und H zusammen, so folgt hieraus, daß (nach Hinzufügung der gemeinsamen rechten Winkel an den Punkten K) die vier Winkel des Vierecks $KNMK$ oder des Vierecks $KHLK$ (bei der Hypothese des spitzen Winkels) zusammen größer sind, als die vier Winkel des Vierecks $KDHK$ zusammen. Was zu beweisen war.

- 50 **Zusatz.** Es ist übrigens zweckmäfsig hier zu bemerken, daß die angewandte Beweisführung gültig bleibt, auch wenn — bei der Hypothese des spitzen Winkels — der Winkel beim Punkte L als rechter angenommen wird. Denn das gemeinsame Lot LK wäre (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) immer noch kleiner, als das andre Lot HK , und deshalb könnte man auf diesem ein Stück gleich dem erwähnten Lote annehmen. Sobald aber das feststeht, kann nichts Störendes mehr eintreten.

Anmerkung. Nichtsdestoweniger könnte man zweifeln, ob eine

kommen, während jedoch ihr Abstand stets größer bleibt als eine gewisse gegebene Länge: so kommt die Hypothese des spitzen Winkels zu Falle.

Beweis. Gegeben sei die Länge R . Nimmt man nun auf BX ein Stück BK an, das ein beliebiges Vielfaches der vorgelegten Länge R ist, so wird (nach der vorhergehenden Anmerkung) das in K nach der Seite von AX errichtete Lot diese Gerade sicher in einem Punkte L treffen, und ferner ist (bei der gegenwärtigen Annahme) KL sicher größer als die genannte Länge R . Weiter denke man sich BK in lauter Stücke KK geteilt, von denen jedes einzelne

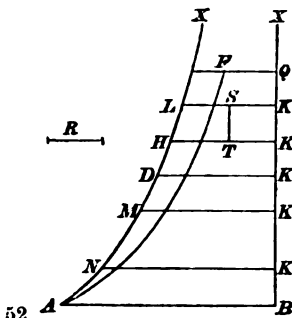


Fig. 30.

gleich R ist, bis zuletzt auch KB gleich der Länge R wird. Endlich mögen in den Punkten K auf BX Senkrechte errichtet werden, die AX in den Punkten L, H, D, M bis zu einem Punkte N treffen, der dem Punkte A am nächsten ist. Nun verfare ich so:

Es sind (nach dem vorhergehenden Lehrsatze) die vier Winkel des von der Grundlinie entfernteren Vierecks $KHLK$ zusammen größer als die vier Winkel des der Grundlinie näheren Vierecks $KDHK$, und die vier Winkel dieses

Vierecks sind zusammen größer als die vier Winkel des Vierecks $KMDK$, das ihm in der Richtung nach der Grundlinie zu folgt. Und so geht es immer weiter bis zum letzten Viereck $KNAB$, dessen vier Winkel zusammen am kleinsten sind im Vergleich zur Summe der vier Winkel jedes der Vierecke, die weiter oben nach den Punkten X zu liegen. Da es aber solcher Vierecke, wie sie im Vorhergehenden beschrieben wurden, eben so viele giebt als man, abgesehen von der Grundlinie AB , Lote aus Punkten von AX auf die Gerade BX gefällt hat, so kann man die Gesamtsumme aller der Winkel ermitteln, die in jenen Vierecken enthalten sind.

Wir wollen annehmen, man habe neun solche Lote gefällt und habe daher auch neun Vierecke. Nun sind (nach I. 13) gleich vier Rechten die Winkel zu beiden Seiten der beiden Endpunkte jedes der acht Lote, die zwischen der Grundlinie AB und dem entferntesten Lote LK liegen. Daher ist die Summe aller dieser Winkel gleich 32 Rechten. Übrig bleiben die beiden Winkel an dem Lote LK und die beiden an der Grundlinie AB . Aber der Winkel beim Punkte K und der beim Punkte B sind der Annahme nach rechte, während der Winkel beim Punkte L (nach dem Satze [I] hinter Lehrsatz XXIII) stumpf ist. Mithin übertrifft (auch ohne Berücksichtigung des spitzen Winkels bei dem Punkte A) die Summe aller Winkel, die von den

neun Vierecken gebildet werden, 35 Rechte. Hieraus folgt aber, daß die Summe der vier Winkel des am weitesten von der Grundlinie entfernten Vierecks $KHLK$ sich von vier Rechten um weniger als den neunten Teil eines Rechten unterscheidet, und zwar auch dann noch, wenn jedem einzelnen jener Vierecke der gleiche Anteil an der genannten Summe aller Winkel zukäme. Mithin wird der betreffende Unterschied sogar noch kleiner sein, da gezeigt worden ist, daß die Summe der vier Winkel jenes Vierecks $KHLK$ im Vergleich zur Summe der vier Winkel jedes der übrigen Vierecke die allergrößte ist. 53

Ferner aber kann man wegen der Annahme, unter der dieser Lehrsatz gültig sein soll, die Länge von BK so groß annehmen, daß über den Grundlinien KK , die jede für sich jener gegebenen Länge R gleich sind, so viele Vierecke gezeichnet werden können, als man nur will. Daher wird sich die Abweichung der Winkelsumme des entferntesten Vierecks $KHLK$ von vier Rechten schliesslich kleiner herausstellen als ein Hundertstel und als ein Tausendstel und überhaupt als jeder noch so kleine angebbare Teil eines Rechten.

Weiter sind jedoch (nach der vorhergenannten Voraussetzung) LK und HK größer als die gegebene Länge R . Wenn man also auf KL und KH Stücke KS und KT gleich KK oder der Länge R annimmt, so ist, wenn man ST zieht, (nach dem Zusatze hinter Lehrsatz XVI) die Summe der Winkel KST und KTS (bei der Hypothese des spitzen Winkels) größer als in dem Viereck $THLS$ oder in dem Viereck $KHLK$ die Summe der Winkel bei den Punkten H und L , und deshalb sind (nach Hinzufügung der gemeinsamen rechten Winkel bei den Punkten K und K) die vier Winkel des Vierecks $KTSK$ zusammen größer als die vier Winkel jenes Vierecks $KHLK$.

Nunmehr ist einerseits unveränderlich und gegeben das Viereck $KTSK$, denn es wird gebildet von der Grundlinie KK , die gleich der gegebenen Länge R sein sollte, ferner von den beiden Loten TK und TS , die dieser Grundlinie gleich sind und endlich von der Verbindungsgeraden TS , die durchaus bestimmt ausfällt, und andererseits ist bewiesen, daß die Summe der vier Winkel jenes unveränderlichen und gegebenen Vierecks größer ist als die Summe der vier Winkel des Vierecks $KHLK$, das von der Grundlinie AB beliebig weit absteht. Folglich fällt die Summe der Winkel jenes unveränderlichen und gegebenen Vierecks $KTSK$ größer aus als irgend eine Summe von Winkeln, die auch noch so wenig von vier Rechten abweicht, denn es ist gezeigt worden, daß man immer ein solches Viereck $KHLK$ angeben kann, bei dem die Winkelsumme von vier Rechten weniger 54 abweicht als irgend ein angebar noch so kleiner Teil eines rechten

Winkels. Mithin ist die Summe der Winkel jenes unveränderlichen und gegebenen Vierecks entweder gleich vier Rechten oder gröfser. Dadurch aber wird (nach Lehrsatz XVI) die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels bedingt, und infolgedessen kommt (nach Lehrsatz V und VI) die Hypothese des spitzen Winkels zu Falle.

Daher wird die Hypothese des spitzen Winkels sicher zerstört, wenn zwei in derselben Ebene liegende Gerade einander immer näher kommen, während jedoch ihr Abstand stets gröfser bleibt, als eine gewisse gegebene Länge. Das aber war zu beweisen.

Zusatz I. Aber (wenn einmal die Hypothese des spitzen Winkels zerstört ist) so liegt nach Lehrsatz XIII das strittige Euklidische Axiom auf der Hand, was eben hier darzulegen, ich in der Anmerkung III hinter Lehrsatz XXI verheifsen habe, als ich den Versuch des Arabers Nassaradin besprach.

Zusatz II. Andererseits läfst dieser Lehrsatz und der frühere dreiundzwanzigste deutlich erkennen, dafs es zur Begründung der Euklidischen Geometrie nicht genügt, wenn man die beiden folgenden Festsetzungen trifft:

Die erste besteht darin, dafs man solche Gerade parallel nennt, die in derselben Ebene liegen und ein gemeinsames Lot besitzen. Die zweite besteht darin, dafs alle Geraden, die in derselben Ebene liegen und kein gemeinsames Lot besitzen und daher nach der angenommenen Erklärung nicht parallel sind, sich einmal, sobald sie nach einer von beiden Seiten immer mehr verlängert werden, wenn nicht in endlicher, 56 so doch in unendlicher Entfernung schneiden müssen. Es wäre nämlich erst noch zu beweisen, dafs irgend zwei Gerade, die in derselben Ebene liegen und mit denen eine schneidende Gerade auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sonst nirgends ein gemeinsames Lot erhalten können. Es wird sich aber weiter unten*) herausstellen, dafs, wenn man dieses bewiesen hat, die Euklidische Geometrie aufs Strengste begründet ist.

Lehrsatz XXVI. *Wenn die vorhergenannten Geraden AX und BX (Fig. 31) zwar zusammentreffen sollen, jedoch erst, wenn man sie nach der Seite der Punkte X ins Unendliche verlängert hat, so behaupte ich, dafs man auf AB keinen Punkt T angeben kann, bei dem die nach der Seite von AX errichtete Senkrechte diese Gerade AX nicht in einem endlichen oder begrenzten Abstände in einem Punkte F trifft.*

*) [Nämlich in der Anmerkung I zu Lehrsatz XXVII.]

Beweis. Es giebt nämlich (bei der obigen Annahme) auf AX einen Punkt N , der so beschaffen ist, daß das von ihm auf BX gefällte Lot NK kleiner ist, als jede beliebige gegebene Länge, zum Beispiel als TB . Dann aber nehme man auf TB ein Stück CB gleich NK und ziehe CN . Bei der Hypothese des spitzen Winkels ist nun der Winkel NCB spitz. Mithin wird (nach I. 13) der Nebenwinkel NCT stumpf. Also wird die Gerade, die von einem Punkte T aus (der zwischen den Punkten A und C liegt) senkrecht nach der Seite von AX gezogen wird, (nach I. 17) keinen Punkt von CN treffen und deshalb (weil sie sonst mit AT oder mit TC einen Raum einschlösse) die begrenzte Gerade AN in einem Punkte F treffen.

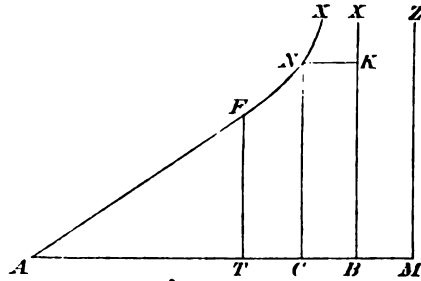


Fig. 31.

Daher liegt sogar bei der Hypothese des spitzen Winkels (die, wie wir wissen, hier allein noch störend sein kann) auf AB kein angebarer Punkt T , bei dem die nach der Seite von AX errichtete Senkrechte die Gerade AX nicht in endlicher oder begrenzter Entfernung in einem Punkte F trifft. Was zu beweisen war.

Zusatz I. Hieraus folgt aber, daß, wenn man auf der Ver- 56
längerung von AB irgend einen Punkt M annimmt und von ihm aus nach der Seite der Punkte X die Senkrechte MZ zieht, diese, auch wenn sie ins Unendliche verlängert wird, nicht mit der genannten Geraden AX zusammentreffen kann, denn sonst müßte die andre Gerade BX (nach dem vorhergehenden Beweise) eben diese Gerade AX in endlichem Abstände treffen, was der gegenwärtigen Voraussetzung widerspricht.

Zusatz II. Daraus folgt ferner, daß jede Senkrechte, die in einem Punkte jener, beliebig verlängerten, Geraden AB errichtet ist, aber freilich nicht in einem unendlich entfernten Punkte, die genannte Gerade AX in endlichem Abstände treffen muß, sobald man nämlich die Annahme macht, daß sich jede solche Senkrechte der andern immer weiter verlängerten Geraden AX immer mehr ohne jede bestimmte Grenze nähert.

Zusatz III. Hieraus folgt endlich, daß BX von jener Geraden AX nicht geschnitten werden kann, auch wenn diese ins Unendliche verlängert wird, weil man sich sonst aus einem Punkte von AX jenseits des genannten Schnittes auf die Verlängerung von AB ein Lot ZM

gefällt denken könnte, woraus wiederum folgte, daß BX (gegen die eben gemachte Voraussetzung) die genannte Gerade AX nicht in einem unendlichen, sondern schon in einem endlichen Abstände trafe.

Aber diese letzte Bemerkung zu machen, liegt eigentlich hier noch kein Bedürfnis vor*).

57 **Lehrsatz XXVII.** *Zieht man von dem Punkte A der Geraden AB aus unter einem beliebig kleinen Winkel eine Gerade AX (Fig. 32), und muß diese schließlich (wenigstens in unendlicher Entfernung) jede Senkrechte BX treffen, die man sich in irgend einer Entfernung von dem Punkte A auf der schneidenden Geraden AB errichtet denkt, so behaupte ich, daß für die Hypothese des spitzen Winkels kein Raum mehr vorhanden ist.*

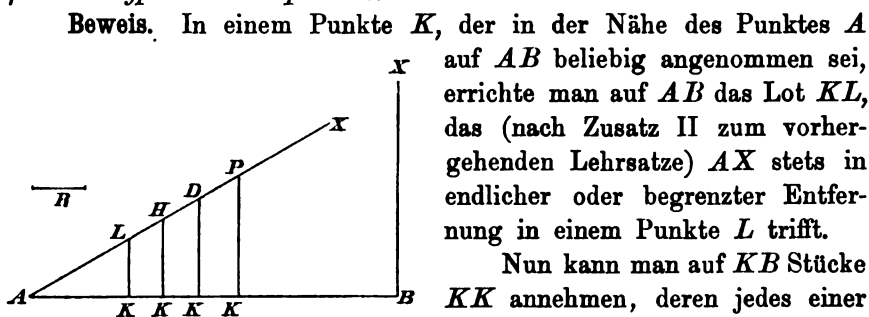


Fig. 32.

auf AB beliebig angenommen sei, errichte man auf AB das Lot KL , das (nach Zusatz II zum vorhergehenden Lehrsatz) AX stets in endlicher oder begrenzter Entfernung in einem Punkte L trifft.

Nun kann man auf KB Stücke KK annehmen, deren jedes einer gewissen gegebenen Länge R gleich ist, und deren Anzahl größer ist

als irgend eine gegebene endliche Zahl, da ja der Punkt B , nach der gegenwärtigen Voraussetzung, in beliebiger Entfernung von dem Punkte A angenommen werden darf.

Demnach errichte man [erstens] in den andern Punkten K auf AB die Lote KH , KD , KP , die (nach dem eben erwähnten Satze) alle die Gerade AX in gewissen Punkten H , D , P treffen; und eben dasselbe gilt für die übrigen, in gleicher Weise gewählten Punkte K nach B hin.

Zweitens sind (nach I. 16) die Winkel bei den Punkten L , H , D , P auf der Seite der Punkte X alle stumpf, und ebenso (nach I. 13) die Winkel an den genannten Punkten auf der Seite des Punktes A alle spitz. Also ist (nach Zusatz II hinter Lehrsatz III) die Seite KH größer als die Seite KL , die Seite KD größer als die Seite KH , und so immer weiter, wenn man nach den Punkten X hin wandert.

Drittens ist die Summe der vier Winkel des Vierecks $KLHK$

*) [Saccheri behandelt hier den unendlich fernen Schnittpunkt, als ob er ein im Endlichen liegender Punkt wäre. Sein späterer Beweis für das Euklidische Axiom (Lehrsatz XXXIII) beruht auf derselben irrtümlichen Auffassung.]

größer als die Summe der vier Winkel des Vierecks $KHDK$, denn das ist in einem ähnlichen Falle schon in Lehrsatz XXIV bewiesen worden.

Viertens gilt dasselbe von dem Viereck $KHDK$ im Vergleich zu dem Viereck $KDPK$, und so immer, wenn man zu Vierecken übergeht, die von dem Punkte A weiter entfernt sind. 58

Da es nun (wie bei Lehrsatz XXV) solcher Vierecke, wie sie eben beschrieben worden sind, ebensoviele giebt als, abgesehen von dem ersten Lote LK , aus Punkten von AX auf die Gerade AB Lote gefällt sind, so ist (wenn wir annehmen, daß außer dem ersten neun solche Lote gefällt sind) in gleicher Weise sicher, daß die Summe aller Winkel, die von jenen neun Vierecken gebildet werden, 35 Rechte übersteigt, und daß deshalb die Summe der vier Winkel des ersten Vierecks $KLHK$, das in dieser Beziehung die andern alle übertrifft, von vier Rechten um weniger abweicht, als der neunte Teil eines Rechten beträgt. Vermehrt man daher die Vierecke über jede beliebige angebbare endliche Zahl, indem man immer nach der Seite der Punkte X hin wandert, so unterscheidet sich in ähnlicher Weise (wie bei dem schon erwähnten Lehrsatz) die Summe der vier Winkel jenes festen Vierecks $KLHK$ von vier Rechten um weniger, als irgend ein beliebiger angebbarer Bruchteil eines Rechten. Also ist die Summe jener vier Winkel entweder gleich vier Rechten oder größer. Dadurch aber wird (nach Lehrsatz XVI) die Hypothese des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels bedingt, und deshalb (nach Lehrsatz V und VI) die Hypothese des spitzen Winkels zu Falle gebracht.

Daher ist sicher kein Raum für die Hypothese des spitzen Winkels vorhanden, wenn eine Gerade AX , die unter einem beliebig kleinen Winkel von dem Punkte A der Geraden AB aus gezogen ist, schließlich (wenigstens in unendlicher Entfernung) jede Senkrechte BX treffen muß, die man sich in irgend einer Entfernung von dem Punkte A auf der schneidenden Geraden AB errichtet denkt. Was zu beweisen war.

Anmerkung I. Grade dieses habe ich in dem Zusatze II hinter Lehrsatz XXV vorausgesagt, daß nämlich für die Hypothese des spitzen Winkels kein Raum übrig bleibt, oder daß die Euklidische 59 Geometrie aufs Strengste begründet wird, wenn irgend zwei Gerade, die in derselben Ebene liegen, zum Beispiel AX und BX , und mit denen eine schneidende Gerade AB (wo der Punkt B in beliebiger Entfernung vom Punkte A angenommen ist) auf der Seite der Punkte X zwei Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte,

wenn (sage ich) diese Geraden (unter der gemachten Voraussetzung) nirgends ein gemeinsames Lot besitzen. Dann kommen nämlich jene beiden Geraden AX und BX einander immer näher und zwar entweder bis zu einer gewissen bestimmten Grenze, wie in Lehrsatz XXV, oder ohne bestimmte Grenze und daher bis zum Zusammentreffen, wenigstens nach unendlicher Verlängerung, wie in diesem Lehrsatz XXVII. Wir wissen aber, daß in jedem der beiden erwähnten Fälle die Hinfälligkeit der Hypothese des spitzen Winkels bereits erwiesen ist, und das war unsre Absicht.

Anmerkung II. Und das ist wiederum, was ich am Schlusse der Anmerkung IV hinter Lehrsatz XXI versprochen habe, wie aus meinen Worten selbst deutlich hervorgeht.

Anmerkung III. Übrigens möchte ich hier auf den Unterschied zwischen diesem Lehrsatz und dem früheren siebenzehnten aufmerksam machen. Denn dort (man gehe auf Fig. 15 zurück) wurde die Hinfälligkeit der Hypothese des spitzen Winkels gezeigt, wenn (unter der Voraussetzung, daß die Gerade AB beliebig klein ist) jede Gerade BD , die unter einem beliebigen spitzen Winkel gezogen ist, schliesslich in einem Punkte K die Verlängerung des Lotes AH treffen muß. Hier aber wird (umgekehrt) die Wahl eines beliebigen, äußerst kleinen spitzen Winkels bei A

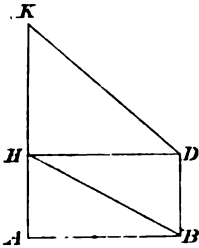


Fig. 15.

gestattet, während das Stück AB , auf dem das unbegrenzte Lot BX zu errichten ist, von beliebiger Länge angenommen werden darf.

Lehrsatz XXVIII. Wenn zwei Gerade AX und BX (die beide nach derselben Seite, die erste unter einem spitzen und die zweite unter einem rechten Winkel von einer beliebig grossen Geraden AB aus gezogen sind) ohne jede bestimmte Grenze einander immer näher kommen, wenigstens solange man die Verlängerung nicht bis ins Unendliche erstreckt, so behaupte ich erstens, daß alle Winkel (Fig. 33) an beliebigen Punkten L, H, D von AX , von denen man auf die Gerade BX Lote LK, HK, DK gefällt hat, auf der Seite des Punktes A durchweg stumpf werden, zweitens, daß sie immer kleiner werden, je weiter sie von dem Punkte A entfernt sind, und endlich, daß diese Winkel, je weiter sie von demselben Punkte A entfernt sind, sich um so mehr, ohne jede bestimmte Grenze, der Gleichheit mit dem rechten Winkel nähern.

Beweis. Der erste Teil ist klar aus Zusatz I hinter Lehrsatz XXIII.

Der zweite Teil aber wird so erhärtet: Es sind nämlich die beiden Winkel an LK auf der Seite der Grundlinie AB (nach dem Zusatze hinter Lehrsatz XVI) zusammen größer als die beiden inneren gegenüberliegenden Winkel an HK , wieder auf der Seite der Grundlinie AB . Es sind aber einander gleich, nämlich als rechte, die Winkel an jedem der beiden Punkte K auf der Seite der Grundlinie AB . Also ist der stumpfe Winkel bei L auf der Seite der Grundlinie AB größer als der stumpfe Winkel bei H , wieder auf der Seite der Grundlinie AB . Auf ähnliche Weise zeigt man, daß der genannte stumpfe Winkel bei H größer ist als der stumpfe Winkel bei dem Punkte D . Und so immer, wenn man nach den Punkten X hin wandert.

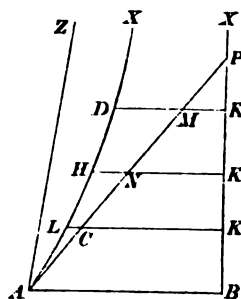


Fig. 33.

Der dritte Teil endlich erfordert eine längere Untersuchung. Wenn das möglich ist, so sei MNC (Fig. 34) ein gewisser gegebener Winkel von der Beschaffenheit, daß der Überschufs jedes der erwähnten stumpfen Winkel über einen Rechten größer oder wenigstens nicht kleiner ist als dieser Winkel. Nun können (nach Lehrsatz XXI) die Seiten NM und NC , die jenen Winkel MNC einschließen, augenscheinlich so weit verlängert werden, daß das Lot MC , das aus einem Punkte M von MN auf NC gefällt ist, (auch hier bei der Hypothese des spitzen Winkels) größer wird als irgend eine gegebene endliche Länge, zum Beispiel als die genannte Grundlinie AB .

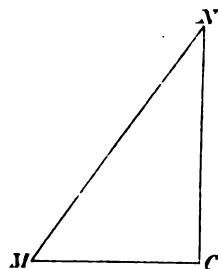


Fig. 34.

61

Man nehme demnach auf BX (Fig. 35) ein Stück BT gleich CN an und errichte in dem Punkte T nach der Seite von AX die Senkrechte TS , die (nach der Anmerkung hinter Lehrsatz XXIV) AX in einem Punkte S trifft. Sodann falle man von dem Punkte S auf AB das Lot SQ . Dieses fällt (nach I. 17) auf die Seite des spitzen Winkels SAB zwischen die Punkte A und B . Weiter ist der Winkel QST in dem Viereck $QSTB$ spitz, weil die drei übrigen Winkel rechte sind, sonst kämen wir ja (gegen Lehrsatz V und VI) auf die Hypothese des rechten Winkels oder auf die des stumpfen Winkels.

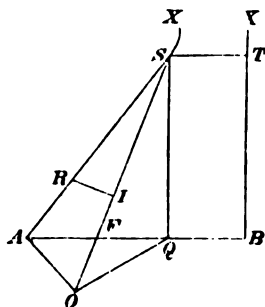


Fig. 35.

Mithin ist die Gerade SQ (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) größer als die Gerade BT oder CN , und ferner der Winkel ASQ größer als der Überschufs des stumpfen Winkels AST über einen Rechten und somit größer als der Winkel MNC .

Man ziehe nunmehr die Gerade SF , die AQ in F schneidet und mit SA einen Winkel gleich MNC bildet. Darauf falle man von A auf die Verlängerung von SF das Lot AO . Der Punkt O liegt (nach I. 17) unterhalb des Punktes F , da der Winkel AFS (nach I. 16) stumpf ist.

Endlich aber: Da FS (nach I. 19) größer ist als QS und daher viel größer als BT oder CN , so nehme man auf FS ein Stück IS gleich CN an und errichte auf FS in dem Punkte I die Senkrechte IR , die AS in dem Punkte R treffe. Es fällt aber der Punkt R zwischen die Punkte A und S . Fiele er nämlich in einen Punkt von AF , so hätten wir (gegen I. 17) in einem Dreieck zwei Winkel, die zusammen größer als zwei Rechte wären, da ja der Winkel bei dem Punkte F auf der Seite des Punktes A schon als stumpf erwiesen ist.

Nach diesen umständlichen Vorbereitungen schliesse ich so: Da in dem Viereck $AOIR$ die Winkel an den Punkten O und I rechte

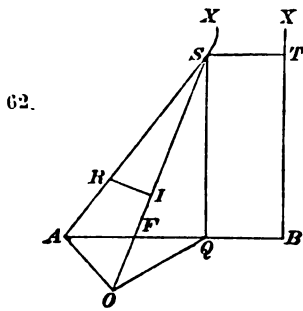


Fig. 35.

sind, und da der Winkel an dem Punkte A wegen des rechten Winkels AOS (nach I. 17) spitz ist, und da ferner der Winkel IRA wegen des rechten Winkels RIS (nach I. 16) stumpf ist, so folgt hieraus endlich (nach Zusatz II hinter Lehrsatz III), dass die Seite AO größer als die Seite IR ist. Es ist aber (wenn man OQ zieht) wegen des stumpfen Winkels bei O die Seite AQ (nach I. 19) größer als die Seite AO , denn der Winkel AOS wurde ja gleich einem Rechten gemacht. Deshalb ist

die Gerade AQ viel größer als die Gerade IR oder (nach I. 26) als die Gerade MC und mithin viel größer als die Gerade AB : der Teil größer als das Ganze, was widersinnig ist.

Man kann daher keinen solchen Winkel MNC angeben, dass der Überschufs jedes der genannten stumpfen Winkel über einen rechten Winkel stets größer oder doch nicht kleiner als dieser ist. Folglich müssen jene stumpfen Winkel, je weiter sie vom Punkte A entfernt sind, sich um so mehr, ohne jede bestimmte Grenze, der Gleichheit mit dem rechten Winkel nähern. Was an letzter Stelle zu beweisen war.

Zusatz. Wenn aber das feststeht, was an letzter Stelle bewiesen ist, so folgt augenscheinlich, dass jene beiden Geraden AX und BX ins Unendliche verlängert schliesslich ein gemeinsames Lot haben

werden, entweder in zwei verschiedenen Punkten oder in ein und demselben unendlich weit entfernten Punkte X .

Dafs aber jenes gemeinsame Lot nicht in zwei verschiedenen Punkten vorhanden sein kann, erhellt augenscheinlich daraus, dafs sonst (nach Zusatz II hinter Lehrsatz XXIII) jene beiden Geraden alsdann anfangen sich von einander zu entfernen und daher auch nicht in unendlicher Entfernung zusammenträfen, sondern (gegen die ausdrückliche Voraussetzung) auf jener Seite überhaupt nicht einander ohne jede bestimmte Grenze immer näher und näher kämen. Daher müssen sie das gemeinsame Lot in ein und demselben unendlich entfernten Punkte X besitzen.

Lehrsatz XXIX. *Nimmt man wieder die Figur 33 des vorhergehenden Lehrsatzes, so behaupte ich, dafs jede Gerade AC , die den Winkel BAX schneidet, einmal in endlicher oder begrenzter Entfernung (auch bei der Hypothese des spitzen Winkels) BX in einem Punkte P treffen wird, sobald nämlich AC nach der Seite der Punkte X hin immer weiter verlängert wird.*

Beweis. Zunächst wird die Gerade AC (weil sie sonst mit AX einen Raum einschlosse) die Geraden LK , HK , DK in endlicher Entfernung in gewissen Punkten C , N , M treffen, wenn sie nicht vorher BX (versteht sich in endlicher Entfernung, was wir eben verlangen) in einem Punkte trifft, der zwischen B und einem der Punkte K liegt. Sodann sind (nach Zusatz I hinter Lehrsatz XXIII) die Winkel ACK , ANK und AMK stumpf.

Weiter nähern sich (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) jene Winkel, die sämtlich stumpf sind, ohne irgend eine bestimmte Grenze immer mehr der Gleichheit mit dem rechten Winkel, falls nämlich jene Gerade AC die Gerade BX erst in unendlicher Entfernung treffen sollte. Man könnte daher zu einer Ordinate KMD kommen, bei der der Überschufs des Winkels AMK über einen rechten Winkel kleiner wäre, als der Winkel DAC beträgt. Dann aber wäre der Winkel DAC oder DAM zusammen mit dem Winkel AMD gröfser als ein Rechter, daher ergäben, wenn man den stumpfen Winkel ADM hinzufügt, die drei Winkel des Dreiecks ADM zusammen mehr als zwei Rechte, was gegen die Hypothese des spitzen Winkels ist.

Mithin mufs jede Gerade AC , die jenen Winkel BAX schneidet,

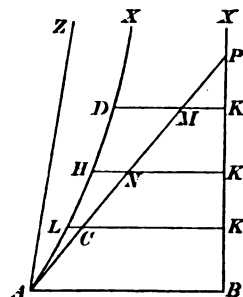


Fig. 33.

schliesslich (auch bei der Hypothese des spitzen Winkels) BX in endlicher oder begrenzter Entfernung in einem Punkte P treffen. Was zu beweisen war.

- 64 **Zusatz I.** Wenn daher eine Gerade AZ auf der Seite der Punkte X einen spitzen Winkel bildet, der gröfser ist als BAX , so kann sie niemals, weder in endlicher noch in unendlicher Entfernung, BX treffen. Falls dies nämlich stattfände; so müfste AX , das ja den Winkel BAZ teilt, (gegen die vorausgeschickte Annahme) BX in endlicher Entfernung treffen, wie das für die Gerade AC bewiesen wurde, die den Winkel BAX teilt.

Zusatz II. Die spitzen Winkel, unter denen sich durch den Punkt A gerade Linien legen lassen, die BX in endlicher Entfernung treffen, haben übrigens, wie aus dem Vorhergehenden folgt, die Eigenschaft, daß es unter ihnen keinen bestimmten giebt, der der größte ist. Wenn man nämlich nach der Seite der Punkte X hin irgend einen Punkt annimmt, der oberhalb des Punktes P liegt, so bildet die Verbindungsgerade zwischen dem Punkte A und diesem höher gelegenen Punkte mit AB einen Winkel, der sicher gröfser ist, als der Winkel BAP . Und so immer fort ohne jede innere Grenze*). Deshalb wird der Winkel BAX (wenn nämlich AX sich zwar der Geraden BX immer mehr und mehr nähert, aber erst in unendlicher Entfernung damit zusammentrifft) die äufsere Grenze**) aller spitzen Winkel sein, unter denen sich durch den Punkt A Gerade legen lassen, welche die erwähnte Gerade BX in endlicher Entfernung treffen.

- Lehrsatz XXX.** Auf irgend einer begrenzten Geraden AB (Fig. 36) stehe eine unbegrenzte Gerade BX senkrecht. Dann behaupte ich erstens, daß die auf AB nach derselben Seite hin errichtete Senkrechte AY die eine Grenze, und zwar nach Innen, aller der Geraden ist, die von dem
- 65 Punkte A aus nach derselben Seite gezogen (bei der Hypothese des spitzen Winkels) in zwei verschiedenen Punkten mit der andern unbegrenzten Geraden BX ein Lot gemeinsam haben***). Zweitens behaupte ich von den spitzen Winkeln, unter denen sich durch den erwähnten Punkt A gerade Linien legen lassen, die (bei der genannten Hypothese) mit BX ein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam haben, Folgendes: es giebt unter ihnen keinen, der von allen der kleinste ist.

*) [Im Original steht: sine ullo termino intrinseco. Gemeint ist, ohne jede Grenze innerhalb des Winkels BAX nach AX hin.]

**) [limes extrinsecus.]

***) [Saccheri betrachtet nämlich nur die Halbstrahlen, die von dem Punkte A ausgehen, und dann haben die jenseits der Senkrechten AY liegenden Halbstrahlen, wie AZ , mit BX kein Lot gemeinsam.]

Beweis des ersten Theiles. Da nämlich AY mit BX das Lot AB in den beiden verschiedenen Punkten A und B gemeinsam hat, so kann eine Gerade AZ , die nach derselben Seite unter einem stumpfen Winkel gezogen ist, auf dieser Seite mit BX sicher kein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam haben, weil sonst ein Viereck entstünde, das vier Winkel

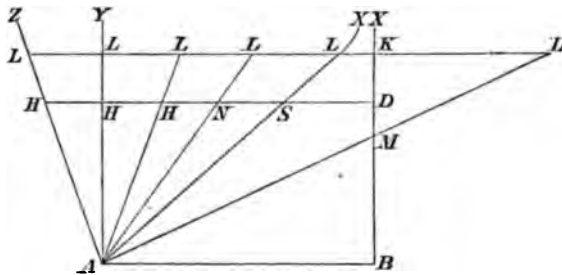


Fig. 36.

enthielte, die zusammen grösser als vier Rechte wären, und man somit (nach Lehrsatz XVI) in Widerspruch mit der hier angenommenen Hypothese des spitzen Winkels auf die bereits widerlegte Hypothese des stumpfen Winkels stieße. Daher ist das Lot AY auf jener Seite nach Innen die Grenze aller der Geraden, die von jenem Punkte A aus nach derselben Seite gezogen (bei der genannten Hypothese des spitzen Winkels) in zwei verschiedenen Punkten ein Lot mit der andern unbegrenzten Geraden BX gemeinsam haben. Das war das Erste.

Beweis des zweiten Theiles. Es sei AN eine Gerade, die mit BX in zwei verschiedenen Punkten ein Lot ND gemeinsam hat, und es sei, wenn das überhaupt möglich ist, der zu ihr gehörige Winkel $[BAN]$ der kleinste von allen den spitzen Winkeln, unter denen sich durch A gerade Linien von dieser Beschaffenheit ziehen lassen. Dann nehme man auf BX einen höher gelegenen Punkt K an, errichte in ihm auf BX die Senkrechte KL und fälle auf diese (nach I. 12) vom Punkte A das Lot AL . Wenn nun dieses Lot AL die Gerade ND in einem Punkte S trifft, so ist der Winkel BAL sicher kleiner als BAN , und dieser ist deshalb nicht der kleinste, unter dem gezogen AN mit BX ein Lot ND in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam hat.

Dafs aber die genannte Gerade ND von diesem Lote AL in einem gewissen Zwischenpunkte S geschnitten wird, beweist man so:

Zunächst folgt nämlich aus I. 17 mit unbedingter Sicherheit, dafs BK von AL nicht in einem Punkte M geschnitten werden kann, weil sonst in einem und demselben Dreieck MKL in den Punkten K und L zwei rechte Winkel wären, abgesehen davon, dafs sich grade in diesem Falle unsre Behauptung über den Winkel BAN bestätigte, dafs er nämlich unter diesen Umständen nicht für den kleinsten erklärt werden darf.

Ferner aber kann die Gerade AL auch nicht die Verlängerung von AN sein, weil man sonst in dem Viereck $NDKL$ vier rechte Winkel hätte, gegen die Hypothese des spitzen Winkels. Sie kann auch nicht die Verlängerung von DN in einem jenseits von N gelegenen Punkte H schneiden, weil dann (nach I. 16) der Winkel AHN spitz wäre, da der Außenwinkel AND der Annahme nach ein rechter ist, und weil deshalb der Winkel DHL stumpf wäre, und man in dem Viereck $DHLK$ vier Winkel hätte, die zusammengenommen größer als vier Rechte wären, gegen die erwähnte Hypothese des spitzen Winkels.

Mithin wird der Winkel BAN notwendig von der Geraden $A[SL]$ geschnitten und kann daher nicht als der kleinste von allen gelten, unter denen gezogen AN mit BX ein Lot ND in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam hat. Was an zweiter Stelle zu beweisen war.

Und so steht fest, daß und so weiter.

Zusatz. Hieraus darf man entnehmen, daß man bei dem kleineren Winkel BAL (bei der Hypothese des spitzen Winkels) ein gemeinsames Lot LK bekommt, das einerseits, wie die Zeichnung erkennen läßt, von der Grundlinie AB weiter entfernt ist und andererseits kleiner ist als das nähere gemeinsame Lot ND , das man bei dem größeren Winkel BAN bekommt. Die zweite Behauptung wird da-
67 durch begründet, daß in dem Viereck $LKDS$ der Winkel an dem Punkte S bei der genannten Hypothese spitz ist, weil die drei andern der Annahme nach rechte sind. Deshalb ist (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) die Seite LK kleiner als die gegenüberliegende Seite SD und daher viel kleiner als die Seite ND .

Lehrsatz XXXI. Jetzt behaupte ich, daß es für die genannten gemeinsamen Lote in zwei verschiedenen Punkten keine bestimmte Grenze giebt, sodaß man also (bei der Hypothese des spitzen Winkels) unter einem immer kleineren spitzen Winkel mit dem Scheitelpunkte A stets zu einem gemeinsamen Lote in zwei verschiedenen Punkten gelangen kann, das kleiner ist, als irgend eine gegebene Länge R .

Beweis. Wofern es sich nämlich anders verhielte, errichte man in einem Punkte K (man gehe auf Fig. 30 zurück), der auf BX in beliebig großer Entfernung von dem Punkte B angenommen ist, die Senkrechte KL und denke sich auf diese (nach I. 12) von dem Punkte A das Lot AL gefällt. Dann müßte KL größer sein als die Länge R . Der Grund dafür ist folgender: Nimmt man wieder auf BX einen höher gelegenen Punkt Q an, errichtet in ihm auf BX die Senkrechte QF und fällt (wieder nach I. 12) auf diese das Lot AF , so darf QF wiederum nicht kleiner sein als die Länge R . Es ist aber KL (nach

dem Zusatze zu dem vorhergehenden Lehrsatz) größer als QF . Daher wäre KL größer als die genannte Länge R . Und so weiter, wenn man höher hinaufgeht. X X

Denkt man sich nunmehr die beliebige grosse Gerade KB (wie in Lehrsatz XXV) in Stücke KK geteilt, die jener Länge R gleich sind, und errichtet man in diesen Punkten K Senkrechte, die AX in den Punkten H, D, M treffen, so sind die Winkel an diesen Punkten auf der Seite des Punktes L weder rechte noch stumpfe, weil sonst in einem Viereck, zum Beispiel in $KLMK$, die vier Winkel zusammen gleich oder grösser als vier Rechte wären, gegen

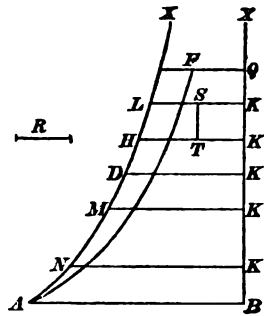


Fig. 30.

die Hypothese des spitzen Winkels, die wir zu Grunde legen. Alle diese Winkel sind also auf der Seite des Punktes L spitz, und deshalb sind wiederum alle Winkel an diesen Punkten auf der Seite des Punktes A stumpf. Somit ist (nach Zusatz I zu Lehrsatz III) KL , das am weitesten von der Grundlinie entfernt ist, unter den genannten Senkrechten die kleinste, und KM , das derselben Grundlinie am nächsten ist, die grösste. Und von den übrigen ist die nähere immer grösser als die entferntere. Deshalb sind (nach dem früheren Lehrsatz XXIV und dem zugehörigen Satze) die vier Winkel des Vierecks $KHLK$, das von der Grundlinie AB am entferntesten ist, zusammen grösser als die Summe der Winkel jedes andern Vierecks, das der Grundlinie näher ist. Demnach würde (wie in Lehrsatz XXV) die Hypothese des spitzen Winkels hinfällig.

Daher giebt es sicher keine bestimmte Grenze der genannten gemeinsamen Lote in zwei verschiedenen Punkten, sodafs man also unter einem immer kleineren spitzen Winkel beim Punkte A (bei der Hypothese des spitzen Winkels) stets zu einem solchen gemeinsamen Lote in zwei verschiedenen Punkten gelangen kann, das kleiner ist als irgend eine gegebene Länge R . Was zu beweisen war.

Lehrsatz XXXII. Jetzt behaupte ich, dafs es (bei der Hypothese des spitzen Winkels) einen bestimmten spitzen Winkel BAX giebt, unter dem gezogen AX (Fig. 33) erst in unendlicher Entfernung mit BX zusammentrifft und somit nach Innen die Grenze ist aller der Geraden, die unter kleineren spitzen Winkeln gezogen die Gerade BX in endlicher Entfernung schneiden, nach Aussen aber die Grenze der andern, die unter gröfseren spitzen Winkeln gezogen, bis zum Rechten, diesen eingeschlossen, mit BX ein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam haben.

Beweis. Erstens giebt es (nach Zusatz II hinter Lehrsatz XXIX) sicher keinen bestimmten spitzen Winkel, welcher der größte von allen ist, unter denen eine durch A gezogene Gerade die genannte Gerade BX in endlicher Entfernung trifft.

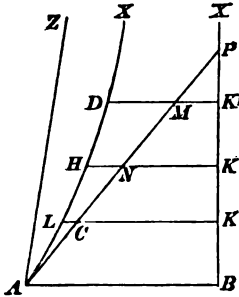


Fig. 33.

Zweitens giebt es (bei der Hypothese des spitzen Winkels) ebensowenig einen kleinsten spitzen Winkel, unter dem gezogen eine Gerade mit BX ein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam hat, da es (nach dem vorhergehenden Lehrsatz) keine bestimmte Grenze geben kann, man vielmehr zu einem kleineren spitzen Winkel mit dem Scheitelpunkte A ein solches gemeinsames Lot in zwei verschiedenen Punkten finden kann, das kleiner als irgend eine angebbare Länge R ist.

Hieraus folgt drittens, daß es (bei dieser Hypothese) einen gewissen bestimmten spitzen Winkel BAX geben muß, unter dem gezogen AX sich der Geraden BX zwar immer mehr nähert, sie jedoch erst in unendlicher Entfernung trifft.

Daß aber eben dieses AX teils nach Innen teils nach Außen die Grenze für jede der beiden genannten Arten von Geraden ist, das beweist man so:

Erstens nämlich hat sie mit jenen Geraden, die BX in endlicher Entfernung treffen, das gemeinsam, daß sie selbst einmal mit BX zusammentrifft; sie unterscheidet sich aber von ihnen, weil das erst in unendlicher Entfernung geschieht.

Zweitens stimmt sie überein mit und unterscheidet sich zugleich von den Geraden, die mit BX ein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam haben, weil sie selber mit BX ein Lot gemeinsam hat, jedoch in ein und demselben unendlich weit entfernten Punkte X . Das zweite nämlich muß vermöge Lehrsatz XXVIII als bewiesen gelten, worauf ich in dem zugehörigen Zusatze aufmerksam gemacht habe.

Folglich giebt es (bei der Hypothese des spitzen Winkels) sicher einen bestimmten spitzen Winkel BAX , unter dem gezogen AX erst in unendlicher Entfernung mit BX zusammentrifft, und der somit teils nach Innen teils nach Außen die Grenze ist einerseits aller der Geraden, die unter kleineren spitzen Winkeln gezogen die Gerade BX in endlicher Entfernung treffen, andererseits der andern, die unter größeren spitzen Winkeln gezogen, bis zum Rechten, diesen ein-

geschlossen, mit BX ein Lot in zwei verschiedenen Punkten gemeinsam haben. Was zu beweisen war.

Lehrsatz XXXIII. *Die Hypothese des spitzen Winkels ist durch und durch falsch, weil sie der Natur der geraden Linie widerspricht.*

Beweis. Wie aus den vorhergehenden Theoremen hervorgeht, führt die der Euklidischen Geometrie entgegenstehende Hypothese des spitzen Winkels schliesslich dahin, daß wir das Vorhandensein zweier in derselben Ebene liegender Geraden AX und BX zugeben müssen, die nach der Seite der Punkte X ins Unendliche verlängert schliesslich in ein und dieselbe gerade Linie zusammenlaufen müssen, da sie nämlich in ein und demselben unendlich entfernten Punkte X ein Lot gemeinsam haben, das in derselben Ebene liegt, wie sie selbst*).

Da ich aber hier auf die allerersten Grundsätze eingehen muß, so werde ich sorgfältig darauf achten, keinen Einwurf, selbst wenn er noch so pedantisch erscheinen möchte, zu übergehen, da dies, wie mir scheint, zu einem vollkommen strengen Beweise der richtige Weg ist.

Hilfssatz I. *Zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein.*

Euklid erklärt die gerade Linie als eine solche, die zwischen ihren Punkten auf einerlei Art liegt. Es sei also (Fig. 37) AX irgend eine Linie, die von dem Punkte A durch beliebige Zwischenpunkte stetig bis zum Punkte X verläuft. Diese Linie heisst dann keine Gerade, wenn sie so beschaffen ist, daß sie, während ihre beiden Endpunkte fest bleiben, um diese auf die andre Seite gedreht werden kann, zum Beispiel von der linken auf die rechte Seite. Sie heisst dann, sage ich, keine gerade Linie, weil sie nicht auf einerlei Art zwischen ihren gegebenen Endpunkten liegt; sie wird nämlich entweder nach links abweichen, wenn sie sich von dem Punkte A nach dem Punkte X durch gewisse Zwischenpunkte B erstreckt, oder sie wird nach rechts abweichen, wenn sie sich von demselben festgehaltenen Punkte A nach demselben festgehaltenen Punkte X durch gewisse Zwischenpunkte C erstreckt, die von den genannten Punkten B durchaus verschieden sind. Denn einzig und allein diejenige Linie AX darf eine Gerade genannt werden, die sich von dem Punkte A zu dem Punkte X durch solche Zwischenpunkte D erstreckt, die ihrerseits in der Anordnung, in der sie auf einander

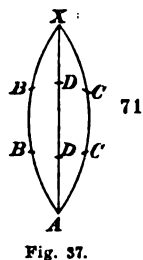


Fig. 37.

*) [Vergleiche die Bemerkung S. 98]

folgen*), bei einer Drehung um jene beiden festgehaltenen Endpunkte A und X niemals neue und neue Lagen annehmen können.

In diesem Begriffe der geraden Linie liegt aber offenbar die angekündigte Wahrheit, daß nämlich zwei gerade Linien keinen Raum einschließen. In der That, sind zwei Linien gegeben, die einen Raum einschließen und deren gemeinsame Endpunkte die beiden Punkte A und X sind, so zeigt man leicht, daß entweder keine oder nur die eine von beiden Linien eine Gerade ist.

Von den beiden Linien, zum Beispiel $ABBX$ und $ACCX$, wird keine eine Gerade sein, wenn man sich $ABBX$ und $ACCX$ um die beiden festgehaltenen Endpunkte A und X derart gedreht denken kann, daß ihre übrigen Zwischenpunkte dazu übergehen, immer neue Lagen anzunehmen. Nur eine, zum Beispiel $ADDX$, wird eine Gerade sein, wenn man sich $ABBX$ und $ACCX$, die mit $ADDX$ auf jeder von beiden Seiten einen Raum einschließen, derart um die festen Endpunkte gedreht denken kann, daß zwar die Zwischenpunkte von $ABBX$ und $ACCX$ dazu übergehen, immer neue Lagen anzunehmen, während dagegen alle Zwischenpunkte von $ADDX$ in derselben Lage verbleiben.

Folglich ist es unmöglich, daß zwei Linien, die dem vorher entwickelten Begriffe der Geraden entsprechen, einen Raum einschließen. Und das war behauptet.

- 72 **Zusatz I.** Hieraus folgt weiter, daß man jene Forderung des Euklid zulassen muß, wonach man *von einem gegebenen Punkte nach jedem beliebig gewählten Punkte eine gerade Linie ziehen kann***). Denn man erkennt deutlich, daß sich immer ohne jede bestimmte Grenze zwei Linien mit den erwähnten Punkten A und X als Endpunkten ziehen lassen, die einander näher kommen und deshalb weniger Raum einschließen, während die eine nach der linken Seite, die andre auf gleiche Art nach der rechten Seite gezogen ist, oder die eine nach oben, die andre nach unten; es lassen sich, sage ich, Linien dieser Art ziehen, die ohne bestimmte Grenze einander immer näher kommen, die in ihrer Gestalt vollkommen mit einander übereinstimmen und deshalb auf einander folgen, wenn man sie um die festgehaltenen Endpunkte A und X gedreht denkt. Hieraus erkennt man ebenso deutlich, daß (wenn diese gleichgestalteten Linien einander immer näher und näher kommen) sie sich schließlich in eine einzige vereinigen müssen, und zwar in die Linie ADX , die eben bei einer

*) [Im Original heißt es: prout sic invicem continuata.]

**) [Euklid, Elemente, Buch I, Forderung 1.]

Drehung um jene festen Endpunkte keine neue Lage annehmen kann. Und das wird die geforderte gerade Linie sein.

Es giebt daher wiederum sicher nur eine einzige gerade Linie, die von einem gegebenen Punkte nach einem andern beliebig gewählten Punkte gezogen werden kann.

Zusatz II. Übrigens folgt hieraus, daß man genau ebenso die andre Erklärung Euklids verstehen muß, in der er sagt, eine Oberfläche sei eben, *wenn sie auf einerlei Art gegen ihre Linien liegt**).

In der That, denkt man sich eine Oberfläche, die von den vorhin genannten Linien eingeschlossen wird, nämlich [Fig. 37] von der geraden $ADDX$ und von der andern $ABBX$ (mag diese nun eine einfache oder eine zusammengesetzte krumme Linie sein oder mag sie aus zwei oder mehr geraden Linien, zum Beispiel aus AB , BB und BX zusammengesetzt sein), denkt man sich, sage ich, eine solche Oberfläche um 73 die festgehaltene Gerade ADX gedreht, bis die Linie ABX mit der entgegengesetzt liegenden Linie ACX zum Zusammenfallen kommt, die überall vollständig gleich und ähnlich mit ABX ist und ihrerseits mit der Geraden ADX (auf derselben Seite, der obern oder der untern) eine Oberfläche einschließt, die der vorhergenannten ganz gleich und ähnlich ist, so giebt es nur zwei Möglichkeiten: entweder deckt sich die eine Oberfläche vollständig mit der andern, oder die beiden Oberflächen schließen einen Raum von dreifacher Ausdehnung ein.

Tritt das Erste ein, dann heißt die Oberfläche eben. Tritt aber das Zweite ein, dann heißt die Oberfläche nicht eben, denn man kann sich Zwischenoberflächen mit denselben Begrenzungslinien eingeschaltet denken, die einander gleich und ähnlich sind und ohne jede bestimmte Grenze einander immer näher kommen und daher auch soweit, daß jeder Zwischenraum wegfällt. Dann aber muß man diese beiden Oberflächen eben nennen, weil sie thatsächlich auf einerlei Art zwischen ihren Begrenzungslinien liegen, ohne sich nach den verschiedenen Seiten zu heben oder zu senken.

Hilfssatz II. *Zwei gerade Linien können nicht ein und denselben Abschnitt gemeinsam haben.*

Beweis. Wenn das überhaupt möglich ist, so sei ein und derselbe Abschnitt AX (Fig. 38) den beiden in derselben Ebene über den Punkt X hinaus verlängerten Geraden AXB und AXC gemein-

*) [Euklid, Elemente, Buch I, Erklärung 7:
 $\begin{array}{l|l} \text{Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐστίν, ἥτις ἐξ} & \text{Plana superficies est, quaecunque ex} \\ \text{ισοῦν ταῖς ἐφ' αὐτῆς εὐθείαις κείται.} & \text{aequo rectis in ea sitis iacet.} \end{array}$

schaftlich. Dann beschreibe man um X als Mittelpunkt mit dem Halbmesser XB oder XC den Bogen BMC und ziehe durch X nach irgend einem seiner Punkte M die Gerade XM .

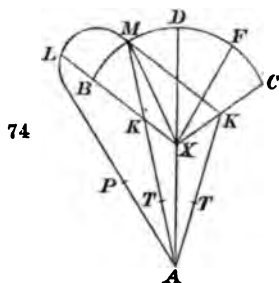


Fig. 38.

Ich behaupte erstens, daß unter der gemachten Annahme auch die Linie AXM eine Gerade ist, die von dem Punkte A nach dem Punkte X gezogen und über X hinaus verlängert ist. Wäre nämlich diese Linie keine Gerade, so könnte man (nach Zusatz I des vorhergehenden Hilfssatzes) eine andre Linie AM ziehen, die ihrerseits gerade wäre. Diese wird entweder eine der beiden Geraden XB und XC

in einem gewissen Punkte K schneiden oder eine von beiden, zum Beispiel XB , in den Flächenraum einschließen, der von AX , XM und $APLM$ begrenzt wird. Aber die erste Möglichkeit widerstreitet augenscheinlich dem vorhergehenden Hilfssatze, weil dann die beiden Linien AXK und ATK , die der Annahme nach Gerade sind, einen Raum einschließen. Die zweite aber wird sogleich eines ebensolchen Widersinns überführt.

Die Gerade XB muß nämlich bei ihrer Verlängerung über B hinaus $APLM$ schließlich in einem Punkte L treffen. Infolgedessen schließen wieder die beiden Linien $AXBL$ und APL , die der Annahme nach Gerade sind, einen Raum ein. Wollte man übrigens annehmen, daß die Gerade XB über B hinaus verlängert schließlich entweder die Gerade XM oder die Gerade XA in einem andern Punkte trafe, so käme man in gleicher Weise auf einen Widerspruch.

Hieraus aber folgt augenscheinlich, daß bei der gemachten Annahme die Linie AXM selber die gerade Linie ist, die von dem Punkte A nach dem Punkte M gezogen wurde, und das war die Behauptung.

Zweitens behaupte ich, daß die Gerade AXB , von der wir ausgingen (wofern man sich jene beliebig gewählte Verlängerung von dem Punkte A über X nach B beibehalten denkt*), nicht noch zwei verschiedene Lagen in derselben Ebene annehmen kann derart, daß das Stück AX bei beiden Lagen an seiner Stelle verharret, während das andre Stück XB bei der einen der beiden Lagen (zum Beispiel) mit XC , bei der andern mit XM zusammenfällt.

Freilich leugne ich hierbei nicht, daß man sich das Stück XB in

*) [Saccheri denkt sich AX und XB starr verbunden und dieses starre System um AX gedreht.]

seiner Ebene um den Punkt X so gedreht denken kann, daß es nach einander (nach dem vorhergehenden Hilfssatze) nicht nur mit XM und XC genau zusammenfällt, sondern auch mit den unzählig vielen 75 andern Geraden genau zusammenfällt, die von dem Punkte A aus nach den übrigen Zwischenpunkten des Bogens BC gezogen werden können. Ich leugne hierbei nicht, sage ich, daß XB in jeder dieser Lagen als die geradlinige Verlängerung der festen Geraden AX angesehen werden darf, da ich ja vielmehr schon bewiesen habe, daß dies bei AXM eintreten wird, wenn man das Vorhandensein eines gemeinsamen Abschnittes annimmt. Somit behaupte ich hier weiter nichts, als daß XB bloß bei einer jener neuen Lagen*), nämlich wenn es mit XC zusammenfällt, dieselbe beliebig gewählte Verlängerung darstellt, wie in der ersten Lage, wo man von dem Punkte A über X nach dem Punkte B fortging.

Dies wird nun so bewiesen: Zunächst kann nämlich jene Verlängerung AXB der Verlängerung AXC nicht durchaus ähnlich oder gleich sein, sobald man beide auf derselben Seite, auf der linken oder auf der rechten, betrachtet, weil sonst AXB und AXC unter diesen Umständen mit einander zusammenfallen müßten, was gegen die Annahme in Betreff jenes gemeinsamen Abschnittes AX ist. Sie müßten, sage ich, zusammenfallen, sobald nämlich in Bezug auf die feste Gerade AX die Verlängerungen XB und XC in der betreffenden Ebene sich beide genau in derselben Weise entweder nach links oder nach rechts erstreckten.

Ferner hindert sicher nichts, daß die genannte Verlängerung AXB auf der einen Seite, zum Beispiel auf der linken, betrachtet genau ähnlich oder gleich der Verlängerung AXC ist, wenn diese auf der entgegengesetzten Seite betrachtet wird, hier also auf der rechten, sodaß mithin AXB , ohne irgend eine Veränderung zu erleiden, in derselben Ebene mit der andern Geraden AXC zur Deckung gebracht werden kann.

Augenscheinlich geht es aber nicht an, daß die Gerade AXB ohne irgend eine Veränderung ihrer Verlängerung in derselben Ebene mit der andern Geraden AXM zur Deckung gebracht werden kann, die jenen gewissen Winkel BXC bei X teilt. Denn daß die Verlängerung AXB ganz verschieden ist von der Verlängerung AXM , wenn beide auf derselben Seite, entweder auf der linken oder auf der rechten, betrachtet werden, das ist deshalb klar, weil sonst (wie schon bei ähnlicher 76

*) [Nämlich bei der durch Drehung des starren Systems AXB um AX entstandenen neuen Lage AXC , die zu AXB symmetrisch ist.]

Gelegenheit bemerkt worden ist) unter diesen Umständen AXB und AXM zusammenfallen müßten.

Es kann aber auch nicht aufrecht erhalten werden, daß die Verlängerung AXB auf der einen Seite betrachtet, zum Beispiel auf der linken, ganz ähnlich oder gleich sei der Verlängerung AXM , wenn diese auf der entgegengesetzten Seite betrachtet wird, also zum Beispiel auf der rechten. Sonst wäre ja die Verlängerung AXM auf der rechten Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich der Verlängerung AXC , wenn diese auch auf der rechten Seite betrachtet wird, nämlich wegen der vorausgesetzten vollständigen Ähnlichkeit oder Gleichheit zwischen der eben genannten Verlängerung und der Verlängerung AXB , wenn diese auf der linken Seite betrachtet wird, unter diesen Umständen müßten aber (wie schon vorher gesagt wurde) AXM und AXC mit einander zusammenfallen, was der gegenwärtigen Annahme widerspricht.

Aus alle dem ziehe ich den Schluss: daß die angenommene gerade Linie AXB (wofern man sich ihre beliebig gewählte Verlängerung von A bis B beibehalten denkt) nicht noch zwei verschiedene Lagen in dieser Ebene annehmen kann derart, daß das Stück AX beide Male an seiner Stelle verharret, während das andre Stück XB bei einer der beiden Lagen (zum Beispiel) mit XC , bei der andern Lage mit XM zusammenfällt. Und das war die Behauptung.

Drittens behaupte ich, daß die angenommene Gerade AXB auf keine andre Weise ihre beliebig gewählte Verlängerung behalten kann, wenn man sich ihren Teil XB in neue und neue Lagen gebracht denkt, bis er in jener Ebene mit XC zusammenfällt, während das Stück AX inzwischen an derselben Stelle verharret, sie kann, sage ich, ihre beliebig gewählte Verlängerung nicht bewahren, wenn man sich nicht vorstellt, daß das Stück XB hinauf- oder herabsteigt, um mit der festgehaltenen Geraden AX in immer neuen Ebenen zu liegen, bis es zur alten Ebene zurückkehrt und dort mit der genannten Geraden XC zusammenfällt.

- 77 Dies kann in der That schon für bewiesen gelten, weil man nämlich in derselben Ebene keine andre Lage finden kann, bei der die Gerade AXB (während das Stück AX an seinem Platze verharret) ihre beliebig gewählte Verlängerung beibehält, außer wenn sie mit der genannten Geraden AXC zur Deckung gelangt.

Viertens behaupte ich, daß man auf dem Bogen BC einen solchen Punkt D angeben kann, daß, wenn XD gezogen wird, AXD nicht nur eine gerade Linie ist, sondern sich auch so verhält, daß die Verlängerung AXD auf der linken Seite betrachtet genau gleich

oder ähnlich derselben Verlängerung ist, wenn man sie auf der rechten Seite betrachtet.

Beweis. Den ersten Teil beweist man (unabhängig von der besondern Wahl des Punktes D auf dem Bogen BC) durch das Verfahren, das wir vorhin bei der Verlängerung AXM benutzt haben.

Der zweite Teil wird so erhärtet: Wir legen dabei zwei Gerade AXB und AXC mit dem gemeinsamen Abschnitte AX zu Grunde. Ferner setzen wir voraus, daß die Verlängerung AXB auf der linken Seite betrachtet nicht vollständig ähnlich oder gleich derselben Verlängerung ist, wenn man sie auf der rechten betrachtet. Bestände nämlich eine solche vollständige Ähnlichkeit oder Gleichheit, so könnte man leicht zeigen, daß jener Abschnitt AX keiner andern Geraden angehören kann, und zwar ebenso, wie wir es nachher für die Verlängerung AXD zeigen werden. Endlich setzen wir demzufolge voraus, daß die Verlängerung AXB , bei Festhaltung des Abschnittes AX , in derselben Ebene eine solche Lage bekommen kann, daß sie sich mit einer gewissen andern Geraden AXC deckt, wobei die Verlängerung AXC auf der rechten Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXB , wenn diese auf der linken Seite betrachtet wird, und wobei wiederum die Verlängerung AXC auf der linken Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXB , wenn diese auf der rechten Seite betrachtet wird.

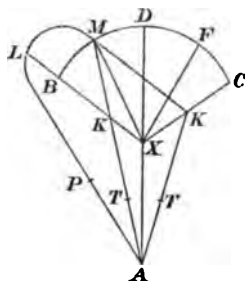


Fig. 38.

Nunmehr nehme man einen Punkt M auf dem Bogen BC an und ziehe XM . Dann ist die Verlängerung AXM entweder auf der linken und auf der rechten Seite von AX sich selbst vollkommen gleich gestaltet, oder nicht.

Tritt das Erste ein, so kann ich von AXM dasselbe beweisen, was ich sogleich von jener Verlängerung AXD beweisen werde. Tritt das Zweite ein, so kann die genannte Gerade AXM in derselben Ebene eine solche Lage bekommen, daß AX wieder unverändert bleibt, während AXM mit einer Verlängerung AXF zusammenfällt, wobei die Verlängerung AXF auf der rechten Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXM , wenn man diese auf der linken betrachtet, und wobei wiederum die Verlängerung AXF auf der linken Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXM , wenn man diese auf der rechten betrachtet.

Da ferner der Punkt M näher an dem Punkte B angenommen werden kann als der Punkt C , so wird der Punkt F nicht in den

Punkt C fallen. Denn sonst wäre die Verlängerung AXM auf der linken Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich der Verlängerung AXF oder AXC , wenn man diese auf der rechten betrachtet, und deshalb ganz ähnlich oder gleich der Verlängerung AXB , wenn man diese auf der linken Seite betrachtet, und das ist widersinnig, da die beiden Geraden XM und XB bei der Lage, die für sie angenommen wurde, nicht zusammenfallen.

Der Punkt F liegt aber auch nicht jenseits des Punktes C in der Verlängerung des Bogens BC , weil sonst eine ähnliche Überlegung zeigte, daß auch der Punkt M , gegen die Annahme, in der Verlängerung des Bogens CB läge, und dann teilte XM links den Winkel AXB , ebenso wie XF rechts den Winkel AXC teilen sollte. Der Punkt M , sage ich, müßte deshalb so liegen, damit AXM , während der Abschnitt AX festgehalten wird, in derselben Ebene zum Zusammenfallen mit AXF gebracht werden kann, weil die Verlängerung AXF auf der rechten Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXM , wenn man diese auf der linken betrachtet, und wiederum die Verlängerung AXF auf der linken Seite betrachtet ganz ähnlich oder gleich ist der Verlängerung AXM , wenn man diese auf der rechten betrachtet.

- 79 Da nun der Bogen BC größer ist als sein Teil MF , und da man in gleicher Weise auf dem Stücke MF zwei andre Punkte mit kleinerem Zwischenraume angeben kann, ohne jede bestimmte Grenze, so muß, weil sich die genannten Punkte einander nähern, eine der beiden folgenden Möglichkeiten eintreten: die erste besteht darin, daß man schliesslich zu ein und demselben Zwischenpunkte D gelangt und durch Verbindung von X mit D eine solche Verlängerung AXD erhält, die (wenn man die linke und die rechte Seite vergleicht) einzig und allein die Eigenschaft besitzt, sich selbst durchaus ähnlich oder gleich zu sein. Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß man zwei verschiedene Punkte dieser Art, M und F , findet, und daß, wenn man XM und XF zieht, zwei Verlängerungen vorhanden sind, die eine AXM , die andre AXF , von denen jede sich selbst ähnlich oder gleich ist, in der schon beschriebenen Art.

Daß aber diese zweite Möglichkeit ausgeschlossen ist, beweise ich so: Aus dem Wortlaute [der Erklärung der geraden Linie] geht nämlich hervor, daß eine gerade Linie, die von A aus gezogen über X verlängert wird, in der Ebene nur eine einzige Lage annehmen kann, sobald die hinzugefügte Gerade XF sich auf der rechten und auf der linken Seite der angenommenen Geraden AX ganz gleich verhält, oder nicht mehr nach ihrer linken als nach ihrer rechten Seite

abweicht. Es wird also keine zweite Verlängerung AXM geben, die sich ebenfalls auf der linken und auf der rechten Seite von AX ganz gleich verhält. Mithin kann es sicher nicht zugleich eintreten, daß einerseits die Verlängerung AXF auf der rechten und auf der linken Seite betrachtet sich selbst ganz ähnlich oder gleich ist, und daß andererseits eine andre Verlängerung AXM (die ihrer Lage wegen von der linken Seite kleiner erscheint als die Verlängerung AXF) auf der linken Seite betrachtet wiederum gleich ist derselben Verlängerung $[AXM]$ auf der rechten Seite betrachtet, während doch diese, abermals ihrer Lage wegen, von der rechten Seite größer erscheint als die erwähnte Verlängerung AXF .

Folglich kann man auf dem Bogen BC nicht zwei solche Punkte M und F finden, daß die Verbindungsgeraden XM und XF zwei Verlängerungen AXM und AXF liefern, die beide auf die schon erklärte 80 Art sich selbst durchaus ähnlich oder gleich sind. Hieraus folgt endlich, daß man schließlich zu ein und demselben Punkte D gelangt, und daß dann die Verbindungslinie XD eine solche Verlängerung AXD ergibt, die einzig und allein die Eigenschaft besitzt, daß sie (wenn man die linke und die rechte Seite mit einander vergleicht) sich selbst durchaus ähnlich oder gleich ist. Was an dieser Stelle zu beweisen war.

Endlich behaupte ich fünftens, daß dieses AXD allein eine gerade Linie ist, nämlich die unmittelbare Verlängerung von A über X nach D . Wenn man nämlich auch das „auf einerlei Art“*) bei der Erklärung der geraden Linie zunächst auf die Zwischenpunkte gegenüber den Endpunkten anwenden muß, woraus wir schon folgerten, daß zwei gerade Linien keinen Raum einschließen, so muß man es doch auch bei der geradlinigen Verlängerung dieser geraden Linie hinzu denken. Daher heißt allein XD (das mit AX in derselben Ebene liegt) die geradlinige Verlängerung der genannten Geraden AX , wenn XD weder nach der rechten noch nach der linken Seite von AX abweicht, vielmehr nach beiden Seiten auf einerlei Art fortgeht, sodaß jene Verlängerung AXD auf der linken Seite betrachtet vollständig ähnlich oder gleich ist derselben Verlängerung, wenn man sie auf der rechten betrachtet. Hieraus folgt nämlich, daß AXD allein die Eigenschaft hat, wenn AX festgehalten wird, keine andre Lage in der Ebene annehmen zu können, während (nach dem schon Bewiesenen) jene andern Linien AXB und AXM ohne jedwede Änderung ihrer Verlängerungen

*) [Im Original heißt es: *ly ex aequo*. Die Bedeutung des Wörtchens *ly* haben wir nicht ermitteln können.]

bei festgehaltenem AX andre Lagen in derselben Ebene annehmen können, nämlich die Lagen AXC und AXF .

Mithin ist allein AXD , dessen Verlängerung XD nicht blofs mit AX in derselben Ebene liegt, sondern sich auch auf der linken und auf der rechten Seite der genannten Geraden AX ganz gleich verhält, nach der besprochenen Erklärung eine *gerade* Linie oder die *geradlinige* Verlängerung der angenommenen Geraden AX .

Aus alle dem geht schliesslich die Unmöglichkeit hervor, dafs es
81 einen gemeinsamen Abschnitt von zwei geraden Linien giebt. Was zu beweisen war.

Zusatz. Es ist zweckmäfsig, drei Folgerungen aus den zwei vorhergehenden Hilfssätzen anzumerken.

Die erste ist die, dafs zwei Gerade, selbst wenn sie einen unendlich kleinen Abstand von einander haben, keinen Raum einschliessen können. Der Grund hierfür liegt darin, dafs (wie in dem ersten Hilfssatze) entweder jede von beiden, unter Festhaltung jener beiden gemeinsamen Endpunkte, durch Drehung eine neue Lage erhalten könnte, und dafs daher (nach der früher mitgetheilten Erklärung der geraden Linie) keine von beiden eine gerade Linie wäre, oder dafs nur die eine in ihrer Lage beharrte und daher allein eine gerade Linie wäre.

Dafs aber nicht beide in derselben Lage beharren können, solange sie einen, wenn auch unendlich kleinen, Raum einschliessen, leuchtet ein, wenn man erwägt, dafs die obere und die untere Seite der Ebene, in der die beiden Geraden liegen, vertauscht werden können, während übrigens jene beiden Endpunkte an derselben Stelle verbleiben.

Die zweite Folgerung besteht darin, dafs keine gerade Linie sich bei beliebiger geradliniger Verlängerung in zwei spalten kann, auch nicht in solche mit unendlich kleinem Zwischenraume. Der Grund hiervon liegt darin, dafs (wie bei dem vorhergehenden Hilfssatze) keine andre geradlinige Verlängerung irgend einer angenommenen einfachen Geraden AX denkbar ist, als die eine XD , die *auf einerlei Art* nach beiden Seiten, sowohl nach der linken als nach der rechten Seite der genannten Geraden AX , fortgeht, woraus folgt, dafs sie bei festgehaltenem AX in dieser Ebene keine andre Lage annehmen kann, wenn sie [als Ganzes] unverändert bleiben soll.

Dafs man aber in derselben Ebene zur Linken eine andre Gerade XM angeben kann, die von XD unendlich wenig abweicht, das nützt nichts. Denn man könnte wiederum zur Rechten eine andre Gerade XF angeben, die gleichfalls unendlich wenig von XD abweicht. Des-
82 halb ist (wie in dem schon erwähnten Hilfssatze) AXD allein eine gerade Linie, wie wir sie erklärt haben.

Die dritte Folgerung endlich ist die, daß durch den zweiten Hilfssatz unmittelbar der Satz XI. 1 bewiesen wird, daß nämlich von ein und derselben Geraden nicht ein Teil in einer unteren und ein Teil in einer oberen Ebene liegen kann.

Hilfssatz III. Wenn zwei Gerade AB und CXD einander in einem Zwischenpunkte X treffen (Fig. 39), so berühren sie sich dort nicht, sondern schneiden einander.

Beweis. Es liege CXD , wenn das überhaupt möglich ist, ganz auf der einen Seite von AB . Man ziehe AC . Dann fällt AC nicht mit AXC zusammen, was dann als Verlängerung [von AX] aufzufassen wäre, weil sonst (gegen den vorhergehenden Hilfssatz) zwei Gerade, erstens AXC und zweitens die von vornherein gegebene DXC , ein und denselben Abschnitt XC gemeinsam hätten.

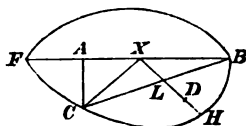


Fig. 39.

Man ziehe ebenso BC . Dann entsteht wiederum BC nicht durch Verlängerung von BA bis zum Punkte C , weil sonst zwei Gerade XAC , ein Stück von BAC , und XC , entgegen dem vorausgeschickten ersten Hilfssatze, einen Raum einschließen. Daher wird BC entweder XD , das heißt die angenommene Gerade DXC , in einem Punkte L schneiden, und dann schließen wieder zwei gerade Linien, nämlich LC , ein Stück von BC , und LXC , ein Stück der genannten Geraden DXC , einen Raum ein, oder einer der beiden Endpunkte, nämlich entweder A von BA oder D von CXD , wäre in dem Raume eingeschlossen, der von CX , XB und, jenachdem, von BFC oder BHC begrenzt würde.

In beiden Fällen ergibt sich jedoch derselbe Widerspruch, sei es, daß die Verlängerung von BA über A hinaus BFC in einem Punkte F trifft, sei es, daß die Verlängerung von CXD über D hinaus BHC in einem Punkte H trifft. Immer kommt man auf denselben Widerspruch, daß zwei Gerade einen Raum einschließen, nämlich entweder die Gerade BF , ein Stück von BFC , mit der andern Geraden BAF oder die Gerade HC , ein Stück von BHC , mit der Verlängerung $CXDH$ der angenommenen Geraden CXD . 83

Überdies ergibt sich derselbe oder ein noch größerer Widerspruch, wenn die Verlängerung von BA über A hinaus entweder CX in irgend einem Punkte, oder sich selbst in irgend einem Punkte ihres Stückes XB treffen sollte. Und dies gilt in ähnlicher Weise, wenn die Verlängerung von CXD über D hinaus entweder XB in irgend einem Punkte oder sich selbst in irgend einem Punkte ihres Stückes CX treffen sollte.

Folglich werden zwei Gerade AB und CXD , die einander in einem Zwischenpunkte X treffen, sich dort nicht berühren, sondern einander schneiden. Was zu beweisen war.

Hilfssatz IV. *Jeder Durchmesser halbiert seinen Kreis und dessen Umfang.*

Beweis. Es sei (man kehre zu Fig. 23 zurück) $MDHNKM$ ein Kreis, A sein Mittelpunkt, MN ein Durchmesser. Man denke sich das Stück $MNKM$ des Kreises um die festgehaltenen Punkte M und N so gedreht, daß es sich schliesslich dem übrigen Stücke $MNHDM$ anfügt oder anpasst.

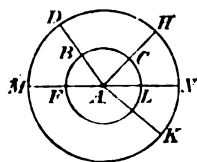


Fig. 23.

Dann bleibt erstens der ganze Durchmesser MAN mit allen seinen Punkten sicher in derselben Lage, weil sonst zwei gerade Linien (gegen den vorhergehenden ersten Hilfssatz) einen Raum einschließen.

Zweitens fällt sicher kein Punkt K des Umfanges NKM innerhalb oder außerhalb des Flächenraumes, der von dem Durchmesser MAN und von dem andern Teile des Umfanges, $MNHDM$ eingeschlossen wird, weil sonst gegen die Natur des Kreises ein Halbmesser, zum Beispiel AK , kleiner oder grösser als ein andrer Halbmesser desselben Kreises wäre, zum Beispiel als AH .

Drittens kann jeder Halbmesser MA sicher nur durch einen ein-
84 zigen andern Halbmesser AN geradlinig verlängert werden, weil sonst (gegen den vorhergehenden zweiten Hilfssatz) zwei der Annahme nach gerade Linien, zum Beispiel MAN und MAH , ein und denselben gemeinsamen Abschnitt MA hätten.

Viertens schneiden sich (nach dem unmittelbar vorhergehenden Hilfssatze) alle Durchmesser des Kreises augenscheinlich in dem Mittelpunkte, und zwar halbieren sie dort einander wegen der bekannten Eigenschaften des Kreises.

Aus alle dem geht hervor, daß der Durchmesser MAN seinen Kreis und dessen Umfang ganz genau in zwei gleiche Teile teilt, und man kann dasselbe auch allgemein für jeden beliebigen Durchmesser desselben Kreises behaupten. Was zu beweisen war.

Anmerkung. Bei Clavius liest man, daß Thales aus Milet einen Beweis für diese Wahrheit gegeben habe. Aber vielleicht war dieser Beweis nicht vollkommen einwurfsfrei.

Hilfssatz V. *Unter den geradlinigen Winkeln sind alle rechten ganz genau einander gleich und zwar ohne irgend eine, wenn auch nur unendlich kleine Abweichung.*

Beweis. Euklid erklärt einen geradlinigen Winkel dann für einen rechten, *wenn er seinem Nebenwinkel gleich ist**). Er verlangt nicht, daß man ihm das Vorhandensein eines solchen Winkels zugebe, sondern er beweist es in Form einer Aufgabe in dem elften Satze des ersten Buches. Dort lehrt er nämlich, wie man in einem beliebig gegebenen Punkte A (Fig. 40) auf der Geraden BC die Senkrechte AD errichten kann, bei der die Winkel DAB und DAC einander gleich sind. Daß aber jene Winkel ganz genau gleich sind ohne jede auch nur unendlich kleine Abweichung, das ergibt sich aus dem Zusatze hinter den beiden ersten Hilfssätzen, die ich vorausgeschickt habe, wenn nämlich AB und AC einander genau gleich gewählt sind.

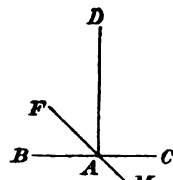


Fig. 40.

85

Es könnte aber ein Bedenken entstehen, wenn man zwei andre rechte Winkel LHF und LHM (Fig. 41) an irgend einer andern Geraden FM mit den genannten rechten Winkeln DAB und DAC vergleicht**).

Es sei also HL gleich AD , und man denke sich die ganze spätere Figur [41] so auf die frühere [40] gelegt, daß der Punkt H auf den Punkt A fällt und der Punkt L auf den Punkt D . Nun verfare ich so:

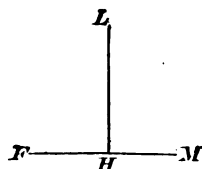


Fig. 41.

Zunächst wird FHM (nach einem früheren Hilfssatze) die Gerade BC in dem Punkte A nicht genau berühren, also wird es entweder genau mit BC zusammenfallen, oder es so schneiden, daß einer der Endpunkte, zum Beispiel F , oberhalb und der andre, M , unterhalb fällt. Findet das Erste statt, so haben wir schon deutlich die behauptete ganz genaue Gleichheit zwischen allen geradlinigen rechten Winkeln. Das Zweite kann aber gar nicht eintreten, weil sonst der Winkel LHF , das ist DAF , kleiner wäre als der Winkel DAB und als der Winkel DAC , der diesem der Annahme nach durchaus gleich ist, und daher viel kleiner als der Winkel DAM oder LHM , was gegen die Voraussetzung ist.

Es hilft auch nichts anzunehmen, daß der Winkel DAF unendlich wenig von dem Winkel DAB oder von dem ihm ganz genau gleichen Winkel DAC abweiche, der wiederum unendlich wenig von dem Winkel DAM übertroffen würde. Denn immer wäre, gegen die Voraussetzung,

*) [Euklid, Elemente, Buch I, Erklärung 10.]

**) [Euklid verlangt in der Forderung 4 des ersten Buches ausdrücklich, daß alle rechten Winkel einander gleich seien. Vermutlich hat er diese Forderung eingeführt, weil er den Begriff der Bewegung vermeiden wollte.]

der Winkel DAF oder LHF nicht ganz genau gleich dem Winkel DAM oder LHM .

Folglich müssen alle geradlinigen rechten Winkel einander ganz genau gleich sein ohne irgend eine, wenn auch nur unendlich kleine Abweichung. Was zu beweisen war.

Zusatz. Hieraus folgt, daß die Gerade, die in einem gegebenen Punkte einer beliebigen geraden Linie in einer Ebene senkrecht zu der Geraden gezogen ist, in dieser Ebene durchaus einzig in ihrer Art ist und sich nicht in zwei spalten kann.

86 *Nachdem ich diese fünf Hilfssätze und ihre Zusätze vorausgeschickt habe, darf ich nunmehr zum Beweise des Haupteinwandes gegen die Hypothese des spitzen Winkels übergehen.*

Es ist, wie ich hier als an sich einleuchtend hinstellen darf, kein geringerer Widerspruch, daß zwei gerade Linien (sei es bei endlicher, sei es bei unendlicher Verlängerung) schliesslich in ein und dieselbe gerade Linie zusammenlaufen, als daß ein und dieselbe gerade Linie (sei es bei endlicher, sei es bei unendlicher Verlängerung) sich in zwei gerade Linien spaltet, entgegen dem vorhergehenden Hilfssatze II und dem zugehörigen Zusatze. Da es also der Natur der geraden Linie (nach dem Zusatze zum letzten Hilfssatze) ebenso widerspricht, daß zwei Gerade in ein und demselben Punkte auf einer dritten Geraden in derselben gemeinsamen Ebene senkrecht stehen, so muß die Hypothese des spitzen Winkels, da sie der angegebenen Beschaffenheit [der geraden Linie] widerspricht, als durchaus falsch angesehen werden, weil nämlich bei ihr jene beiden Geraden AX und BX (Fig. 33) in ein und demselben gemeinsamen Punkte X senkrecht auf einer dritten Geraden stehen müßten, die mit ihnen in derselben Ebene liegt*). Das ist aber grade der Punkt, auf dessen Beweis es mir hauptsächlich ankam.

Anmerkung. Hierbei könnte ich mich gut und gern beruhigen. Aber ich will nichts unversucht lassen, um die widerspenstige Hypothese des spitzen Winkels, die ich schon mit der Wurzel ausgerissen habe, als sich selbst widersprechend nachzuweisen. Das wird nun der einzige Zweck der folgenden Theoreme dieses Buches sein.

*) [Vergl. Lehrsatz XXXIII, S. 109 und die Anmerkung S. 98.]

Des ersten Buches zweiter Teil,

87

wo das Euklidische Axiom abermals durch Widerlegung der
Hypothese des spitzen Winkels bewiesen wird.

Lehrsatz XXXIV, in dem eine gewisse *Kurve untersucht wird, die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt.*

Die Gerade CD verbinde zwei gleiche Gerade AC und BD , die auf irgend einer Geraden AB senkrecht stehen. Man halbiere AB und CD in M und H (Fig. 42) und ziehe die Verbindungsgerade MH , die (nach Lehrsatz II) auf beiden senkrecht steht. Bei der gegenwärtigen Hypothese werden ferner an der Verbindungslinie CD spitze Winkel vorausgesetzt. Deshalb ist in dem Viereck $AMHC$ (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) MH kleiner als AC .

Wenn man jetzt auf der Verlängerung von MH das Stück MK gleich AC annimmt, so sollen die Punkte C , K und D der hier untersuchten Kurve angehören.

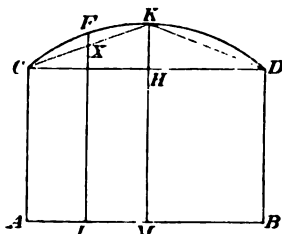


Fig. 42.

Weiter sind die Winkel an der Verbindungslinie CK (nach Lehrsatz VII) ebenfalls spitz, also ist die Gerade LX , die AM und CK halbiert und deshalb (nach Lehrsatz II) unter rechten Winkeln trifft, (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) ebenfalls kleiner als AC . Wenn man daher LF in der Verlängerung von LX gleich AC oder MK annimmt, so soll auch der Punkt F der Kurve angehören. Zieht man ferner CF und FK , so findet man in ähnlicher Weise zwei andre Punkte, die auch der Kurve angehören sollen. Und so immer fort. Es gilt aber die Vorschrift, nach der man Punkte zwischen C und K findet, in derselben Weise auch, wenn man Punkte zwischen K und D finden will.

Die Kurve CKD , die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt, ist nämlich die Verbindungslinie der Endpunkte aller

gleichen Senkrechten, die auf derselben Grundlinie nach derselben Seite errichtet sind, und die man gewöhnlich Ordinaten nennt*). Sie ist, füge ich hinzu, eine Linie, die wegen der Hypothese des spitzen Winkels, aus der sie entspringt, der gegenüberliegenden Grundlinie AB stets ihre hohle Seite zukehrt.

Grade das wollte ich an dieser Stelle darlegen und beweisen.

Lehrsatz XXXV. *Zieht man in irgend einem Punkte L der Grundlinie AB die Ordinate LF der Kurve CKD , so behaupte ich, daß die Gerade NFX , die auf LF senkrecht steht, beiderseits ganz auf der gewölbten Seite der Kurve liegt und daher Tangente dieser Kurve ist.*

Beweis. Es liege, wenn das überhaupt möglich ist, ein Punkt X (Fig. 43), von NFX in der Höhlung dieser Kurve. Man falle von dem Punkte X auf die Grundlinie AB das Lot XP , das über X hinaus verlängert die Kurve in einem gewissen Punkte R treffe. Dann schliesse ich so:

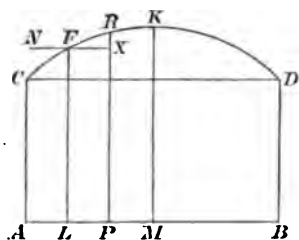


Fig. 43.

In dem Viereck $LFXP$ wird der Winkel bei dem Punkte X weder ein rechter noch ein stumpfer sein, sonst würde nämlich (nach Lehrsatz V und VI) die gegenwärtige Hypothese des spitzen Winkels hinfällig. Infolgedessen ist der genannte Winkel spitz. Deshalb wird (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) PX und daher um so mehr PR größer sein als LF . Das widerspricht aber (nach dem Vorhergehenden) der Natur unsrer Kurve. Folglich muß die Verlängerung der Geraden NF ganz auf die gewölbte Seite fallen, und diese Gerade wird daher Tangente der Kurve sein. Was zu beweisen war.

- 89 **Lehrsatz XXXVI.** *Wenn irgend eine Gerade XF (Fig. 44) mit irgend einer Ordinate LF einen spitzen Winkel bildet, so liegt der Punkt X nicht außerhalb der Höhlung der Kurve, wenn nicht XF vorher die Kurve in einem Punkte O geschnitten hat.*

Beweis. Man kann jedenfalls auf XF den Punkt X so nahe an dem Punkte F annehmen, daß die Verbindungslinie LX die Kurve vorher in einem [von F verschiedenen] Punkte S schneidet, denn sonst läge XF entweder nicht ganz außerhalb der Höhlung der Kurve, und dann hätten wir schon die Behauptung, oder es bildete

*) [Im Original: rectae ordinatim applicatae.]

dieser bis ins Unendliche gleichmäfsig fortgesetzten Teilung herausstellt oder beweisen läfst, dafs man schliesslich zu zwei einander entsprechenden Teilen kommen mufs, von denen feststeht, dafs sie einander gleich sind.

Nunmehr folgt der Beweis der Behauptung.

Man denke sich auf der Grundlinie AB nach der Kurve CKD hin (Fig. 45) beliebig viele Senkrechte NF , LF , PF , MK , TF , VF , IF errichtet, und es seien die Stücke der Grundlinie AN , NL , LP , PM , MT , TV , VI , IB einander gleich.

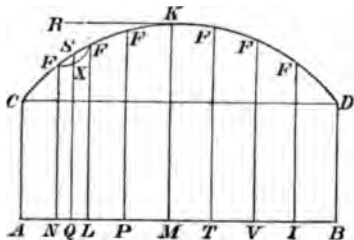


Fig. 45.

Dann ist erstens der Winkel zwischen AC und der Kurve sicher gleich den einzelnen Winkeln, welche die genannten Lote mit der Kurve zu beiden Seiten der Punkte F oder des Punktes K oder beim Punkte D bilden.

Denkt man sich nämlich das gemischte

- 91 Viereck $ANFC$ auf das gemischte Viereck $NLFF$ gelegt, sodafs die Grundlinie AN auf die gleiche Grundlinie NL zu liegen kommt, so fällt AC auf NF und NF auf LF , weil jeder der Winkel bei den Punkten A , N und L gleich einem Rechten ist. Ferner fällt (nach Lehrsatz XXXIV) wegen der Gleichheit der Geraden AC , NF und LF der Punkt C auf den Punkt F von NF und dieser auf den andern Punkt F von LF . Ausserdem deckt sich die Kurve CF ganz genau mit der Kurve FF . Käme nämlich eine von beiden, zum Beispiel CF , innerhalb oder aufserhalb zu liegen, so könnte man irgend einen Punkt Q zwischen den Punkten N und L annehmen und in ihm die Senkrechte errichten, welche die eine Kurve in X , die andre in S schneide, und dann wären (nach der bekannten Beschaffenheit der Kurve) QX und QS gleich, was widersinnig ist. Dasselbe gilt, wenn bei dem erwähnten Aufeinanderlegen die Gerade NF in ihrer Lage bleibt, und AC auf LF fällt. Dasselbe gilt ferner, wenn man sich das nämliche gemischte Viereck $ANFC$ in einer der beiden Weisen auf irgend eins der übrigen Vierecke gelegt denkt, bis zum letzten Viereck $BDFI$ einschliesslich. Folglich ist der Winkel zwischen AC und der Kurve gleich den einzelnen Winkeln zwischen den genannten Senkrechten und derselben Kurve zu beiden Seiten der Punkte F oder des Punktes K oder beim Punkte D .

Zweitens geht hieraus hervor, dafs die einzelnen Stücke der Kurve, die von je zwei benachbarten Senkrechten abgeschnitten werden, einander vollständig gleich sind.

Wenn also die Grundlinie AB in M halbiert und die Hälfte AM in L halbiert wird, dann das Viertel LM in P halbiert wird und so fort bis ins Unendliche, wobei man immer nach der Seite des Punktes M fortgeht, so wird drittens offenbar auch die Kurve CKD in K von der Senkrechten MK halbiert, ebenso die Hälfte CK wieder in F von der Senkrechten LF halbiert, das Viertel FK in F von der Senkrechten PF halbiert, und so weiter bis ins Unendliche, wenn man in derselben Weise nach der Seite des Punktes K fortgeht.

Nun können wir annehmen, daß man bei dieser ins Unendliche fortgesetzten Teilung der Grundlinie AB schliesslich zu einem unendlich kleinen Stück von AB gelangt, das durch die unendlich kleine Breite der Senkrechten MK dargestellt wird, und dann ergibt sich viertens (aus dem vorangeschickten Axiome) die behauptete Gleichheit der ganzen Grundlinie AB mit der ganzen Kurve CKD , wenn ich nur zeigen kann, daß das unendlich kleine Stück, das die Senkrechte MK von der Grundlinie AB abschneidet, genau gleich ist dem unendlich kleinen Stück, das dieselbe Senkrechte von der Kurve CKD abschneidet. Und dieses letztere beweise ich so:

Wenn die Gerade RK auf KM senkrecht steht, so berührt sie (nach Lehrsatz XXXV) die Kurve in K , und zwar berührt sie diese in K so, daß (nach dem Zusatze hinter Lehrsatz XXXVI) zwischen die Tangente und die Kurve auf keiner von beiden Seiten eine Gerade [Halbstrahl] gelegt werden kann, welche die Kurve nicht schneidet. Mithin ist das zur Kurve gehörige, unendlich kleine Stück K genau ebenso groß, wie das zur Tangente gehörige, unendlich kleine Stück K . Nun ist aber das zur Tangente gehörige, unendlich kleine Stück K weder größer noch kleiner als das unendlich kleine, zur Grundlinie AB gehörige Stück M , vielmehr ihm vollständig gleich, weil man sich nämlich die Gerade MK dadurch beschreiben denken kann, daß eben dieser Punkt M in beständig gleichmäßiger Bewegung bis zu der Höhe von K hinaufrückt.

Deshalb müßte (nach dem vorausgeschickten Axiome) die Kurve CKD , die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt, der gegenüberliegenden Grundlinie AB gleich sein. Was zu beweisen war.

Anmerkung I. Aber vielleicht wird manchem die eben behauptete genaue Gleichheit zwischen jenen unendlich kleinen Stücken M und K zu wenig einleuchtend erscheinen*). Um daher dieses Bedenken zu beseitigen, verfare ich wiederum so:

*) [Saccheri scheint also selbst gefühlt zu haben, daß der eben geführte Beweis ungenügend ist.]

Auf irgend einer Geraden AB mögen in derselben Ebene zwei gleiche Geraden AC und BD (Fig. 48) senkrecht stehen. Man denke sich in derselben Ebene einen Kreis $BLDH$ mit dem Durchmesser BD , dessen halber Umfang BLD der genannten Geraden AB gleich ist. Nunmehr stelle man sich vor, dieser Kreis rolle in seiner Ebene derart über die Gerade AB hin, daß er in stetiger und gleichmäßiger Bewegung mit den Punkten seines halben Umfanges die genannte Gerade BA durchmisst oder beschreibt, bis nämlich der zu jenem

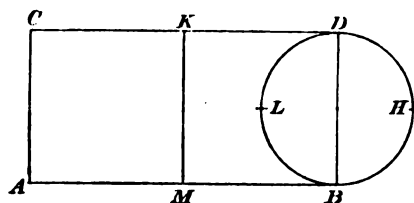


Fig. 48.

halben Umfange gehörige Punkt D mit dem Punkte A zusammenfällt, wobei dann der Punkt B , der andre Endpunkt desselben halben Umfanges, mit dem Punkte C zusammenfällt.

Nunmehr möge auf dem halben Umfange BLD irgend ein Punkt L gewählt werden, dem bei der Beschreibung der geraden Linie BA der Punkt M entspricht. In M errichte man in derselben Ebene die Senkrechte MK gleich BD . Dann behaupte ich, daß dem Punkte K grade der Endpunkt H des durch L gehenden Durchmessers entspricht.

Es berührt nämlich hier die Gerade AB den genannten Kreis in dem Punkte M oder L , infolgedessen geht die Gerade MK , die auf AB senkrecht steht (nach III. 19*), was von dem strittigen Axiome durchaus unabhängig ist), durch den Mittelpunkt desselben Kreises. Sobald daher der Punkt L bei einem solchen Rollen des Kreises $BLDH$ mit dem Punkte M auf AB zusammenfällt, wird auch der Endpunkt H des durch den genannten Punkt L gehenden Durchmessers auf den Punkt K von MK fallen.

Weiter gilt dasselbe sicher in entsprechender Weise von den übrigen Punkten des halben Umfanges BLD und den gegenüberliegenden Endpunkten der zugehörigen Durchmesser, die auf dem andern halben Umfange BHD liegen. Daher ist die Linie, die auf diese Weise von den Punkten des halben Umfanges BHD nach und nach beschrieben wird, die schon untersuchte Linie DKC , die in allen ihren Punkten von der Geraden BA denselben Abstand hat, und die infolgedessen (bei der Hypothese des spitzen Winkels) auf der Seite von AB immer hohl ist.

*) [Wenn eine Gerade einen Kreis berührt, und man vom Berührungspunkte aus senkrecht zu der berührenden Geraden eine gerade Linie zieht, so liegt auf dieser der Mittelpunkt des Kreises.]

Hieraus aber folgt, daß die Punkte M auf BA und K auf DKC als genau gleich anzusehen sind, weil sie nämlich den beiden Endpunkten L und H des zu ihnen gehörigen Durchmessers des Kreises $BLDH$ durchaus gleich sind. Da nun dasselbe von allen Punkten der Geraden BA gilt, die bei dem Rollen beschrieben wird, wenn man sie mit den andern, ihnen ebenso gegenüberliegenden Punkten jener angenommenen Kurve DKC vergleicht, so folgt offenbar, daß eben diese Kurve, die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt, der gegenüberliegenden Grundlinie AB gleich zu erachten ist. Aber grade das hatte ich durch diese neue Methode wiederum zu beweisen unternommen*).

Anmerkung II. Weil man sich aber die Gerade BA bei jener immer gleichmäßigen und stetigen Bewegung nach und nach von den Punkten des halben Umfanges BLD beschrieben denkt, und weil in entsprechender Weise die Linie DKC von den zugehörigen gegenüberliegenden Punkten des andern halben Umfanges BHD beschrieben wird, so erkennt man leicht, daß die Gerade BA durch jene immer gleichmäßige und stetige Bewegung von einem einzigen Punkte B beschrieben wird, den man sich mit jenem halben Umfange (gewissermaßen abgewickelt) immer auf BA hinlaufend denken muß, während inzwischen in genau derselben Zeit durch dieselbe immer gleichmäßige und stetige Bewegung jene andre Kurve DKC von einem einzigen Punkte D beschrieben wird, nämlich von dem andern Endpunkte des zu B gehörigen Durchmessers, den man sich seinerseits (gewissermaßen abgewickelt) mit seinem andern halben Umfange BHD immer auf der genannten Kurve DKC hinlaufend denken muß. Dann aber erkennt man leichter die behauptete Gleichheit zwischen DKC und der gegenüberliegenden Geraden BA , weil beide in gleicher Zeit und durch die gleiche Bewegung von zwei einander ganz genau gleichen Punkten oder besser unendlich kleinen Stücken beschrieben werden**). Übrigens hat die ganz genaue Gleichheit der genannten Punkte offenbar auf die neue Betrachtung gar keinen Einfluß.

Lehrsatz XXXVIII. *Die Hypothese des spitzen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört.*

*) [Dieser Beweis leidet an genau denselben Gebrechen wie der vorhergehende.]

**) [Auch diese Betrachtungen sind nicht besser als die vorhergehenden. Der Kreis $BHDL$ rollt zwar auf der Geraden AB und wickelt sich auf ihr ab, aber er rollt nicht zu gleicher Zeit auf der Kurve DKC und wickelt sich infolgedessen auch nicht auf dieser ab.]

Beweis. Vorhin haben wir nämlich aus der Hypothese des spitzen Winkels deutlich erschlossen, daß die aus ihr abgeleitete Kurve CKD

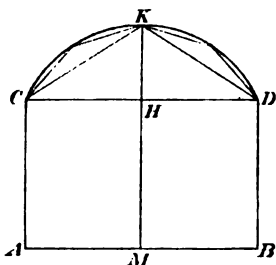


Fig. 46.

(Fig. 46) der gegenüberliegenden Grundlinie AB gleich sein muß. Jetzt aber erschließen wir aus derselben Hypothese das Gegenteil, daß nämlich die Kurve CKD jener Grundlinie nicht gleich sein kann, weil sie unbedingt größer ist als diese.

Daß nämlich die Kurve CKD größer ist als die Gerade CD , die ihre Endpunkte verbindet, das zeigt die unmittelbare Anschauung.

Man kann es allerdings auch mit Hilfe von I. 20 beweisen, wonach zwei Seiten eines Dreiecks zusammen immer größer sind als die dritte, indem man nämlich CK und KD zieht, und wiederum in ähnlicher Weise zunächst die Spitzen von zwei Abschnitten verbindet, dann von vier und so weiter ins Unendliche, wobei die Anzahl der so entstehenden Abschnitte sich immer verdoppelt, bis die ganze Kurve CKD auf diese Weise schließlich in die unendlich kleinen Sehnen oder Tangenten zerlegt ist. Indes brauchen wir uns hier bloß auf die unmittelbare Anschauung zu berufen.

Daß jedoch andererseits die Verbindungslinie CD größer ist als die Grundlinie AB , das haben wir im dritten Lehrsatz aus der innersten Natur der Hypothese des spitzen Winkels bewiesen. Daher ist die Kurve CKD , die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt, gewiß größer als die Grundlinie AB , denn nach der unmittelbaren Anschauung ist sie größer als die Gerade CD , und diese ist, wie bei der Hypothese des spitzen Winkels bewiesen werden kann, größer als die Grundlinie AB . Damit ist aber nicht vereinbar, daß die Kurve CKD der Grundlinie AB gleich ist.

Mithin steht fest, daß die Hypothese des spitzen Winkels ganz und gar falsch ist, weil sie sich selbst zerstört.

Anmerkung. Ich muß noch bemerken, daß auch aus der Hypo-

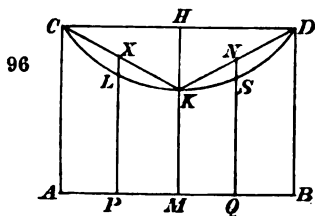


Fig. 47.

these des stumpfen Winkels eine gewisse Kurve CKD entspringt, die jedoch auf der Seite der Grundlinie AB gewölbt ist. Denn die Halbierungslinie MH (Fig. 47) von AB und CD steht (nach Lehrsatz II) auf beiden senkrecht und ist bei der Hypothese des stumpfen Winkels (nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) größer als AC und BD . Deshalb

ist ein gewisses Stück MK von MH gleich AC oder BD . Zieht man jetzt CK und KD und halbiert die Geraden CK , AM , MB , KD in den Punkten X , P , Q , N , so stehen (wieder nach Lehrsatz II) die Verbindungslinien PX und QN sicher auf den durch sie getheilten Geraden senkrecht. Sie sind aber wiederum (ebenfalls nach Zusatz I hinter Lehrsatz III) gröfser als AC , MK und BD . Nimmt man daher auf ihnen Stücke PL und QS an, die den genannten Geraden gleich sind, so hat man eine aus der Hypothese des stumpfen Winkels entspringende Kurve, die durch die Punkte C , L , K , S , D hindurchgeht. Und so immer weiter, wenn man die übrigen Punkte derselben Kurve angeben will. Hieraus aber geht hervor, dafs die Kurve auf der Seite der Grundlinie AB gewölbt ist.

Nun gebe ich zu, dafs man genau auf dieselbe Weise die Gleichheit dieser Kurve mit der Grundlinie AB hätte beweisen können. Aber was wäre der Erfolg? Sicherlich gar keiner! Denn, wenn einerseits jene Kurve CKD , nach der unmittelbaren Anschauung, für gröfser gelten mufs als die Gerade CD , so wird andererseits (in Lehrsatz III) bewiesen, dafs die Grundlinie AB gröfser ist als CD , sobald die Hypothese des stumpfen Winkels gilt. Es ist also hier kein Widerspruch, wenn die Grundlinie AB der genannten Kurve gleich ist. Dafs es sich aber bei der Hypothese des spitzen Winkels ganz anders verhält, das geht aus dem vorhin Gesagten hervor.

Aus dieser Anmerkung nun und aus einer andern hinter Lehrsatz XIII ist zu ersehen, dafs wir zur Widerlegung der beiden falschen Hypothesen, der des stumpfen Winkels und der des spitzen Winkels, zwei ganz verschiedene Wege einschlagen mufsten.

Übrigens erkennt man aus dem Vorhergehenden ohne Mühe, dafs nur die gerade Linie CD in allen ihren Punkten gleichen Abstand von der Grundlinie AB haben kann.

Lehrsatz XXXIX. *Werden zwei gerade Linien von einer andern geschnitten, und sind die innern Winkel, die diese auf derselben Seite bildet, zusammen kleiner als zwei Rechte, so treffen die beiden Linien, ins Unendliche verlängert, einander auf der Seite, wo die Winkel zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

Das ist eben das berühmte Euklidische Axiom, das ich endlich vollständig zu beweisen unternehme.

Zu diesem Endzwecke aber genügt es, an einige der vorhergehenden Beweise zu erinnern. Ich habe in meinen Lehrsätzen bis zum siebenten einschliesslich in Bezug auf die Verbindungsgerade der Endpunkte von zwei gleich langen Geraden, die in derselben

Ebene auf einer von mir Grundlinie genannten Geraden senkrecht stehen, drei Hypothesen unterschieden. Von diesen Hypothesen (deren Kennzeichen bei mir die Beschaffenheit der Winkel ist, die an der Verbindungslinie auftreten sollen) beweise ich ferner, daß, wenn eine von ihnen, nämlich entweder die des rechten Winkels oder die des stumpfen Winkels oder die des spitzen Winkels, auch nur in einem Falle richtig ist, daß sie dann in jedem Falle immer allein die richtige ist. Darauf zeige ich in Lehrsatz XIII die allgemeine Giltigkeit des strittigen Axioms, sobald eine von den beiden Hypothesen des rechten oder des stumpfen Winkels besteht. Hieraus leite ich im Lehrsatz XIV ab, daß die Hypothese des stumpfen Winkels ganz und gar falsch ist, weil sie sich selbst zerstört, weil sie nämlich die Wahrheit des genannten Axioms nach sich zieht, das, in Widerspruch mit den beiden übrigen Hypothesen, nur für die Hypothese des rechten Winkels Raum übrig läßt. Daher bleibt bloß die Hypothese des spitzen Winkels übrig, gegen die längere Zeit gekämpft werden mußte.

Aber auch von dieser zeige ich (nachdem ich bei geeigneter Gelegenheit Vieles, um nicht zu sagen Alles, geprüft habe) endlich in Lehrsatz XXXIII, daß sie ganz und gar falsch ist, weil sie der Natur der geraden Linie widerspricht, über die ich dort viele, jedoch unentbehrliche Hilfssätze einfüge. Endlich aber beweise ich in dem vorhergehenden Lehrsatz in aller Vollständigkeit, daß die Hypothese
 98 des spitzen Winkels sich selbst widerspricht. Da somit einzig und allein die Hypothese des rechten Winkels übrig bleibt, so folgt hieraus offenbar, daß durch den erwähnten Lehrsatz XIII das vorhin ausgesprochene Euklidische Axiom vollständig begründet wird. Und das war die Behauptung.

Anmerkung. An dieser Stelle möchte ich einen bemerkenswerten Unterschied zwischen den vorhergehenden Widerlegungen der beiden Hypothesen zur Sprache bringen.

Bei der Hypothese des stumpfen Winkels ist nämlich die Sache heller als die Sonne im Mittag, weil sich ja, wenn man sie als wahr annimmt, aus ihr die vollständige und allgemeine Giltigkeit des strittigen Euklidischen Axioms erweisen läßt, und daraus kann nachher die vollständige Unrichtigkeit eben dieser Hypothese bewiesen werden, wie das aus Lehrsatz XIII und XIV hervorgeht.

Dagegen gelingt es mir nicht, die Unrichtigkeit der andern Hypothese, nämlich der des spitzen Winkels, nachzuweisen, ohne vorher zu zeigen, daß die Linie, deren Punkte alle von einer angenommenen

geraden Linie gleich weit abstehen, und die in derselben Ebene mit dieser liegt, eben dieser Geraden gleich ist.

Nun könnte es scheinen, als ob ich grade das nicht aus dem eigentlichen Wesen dieser Hypothese bewiesen hätte, was doch für eine tadellose Widerlegung erforderlich gewesen wäre. Ich antworte aber, daß ich in Lehrsatz XXXVII drei Mittel gebraucht habe, um die genannte Gleichheit zu beweisen. Zunächst beweise ich in diesem Lehrsatz selbst, daß die Kurve CKD , die ja aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt (und die deshalb auf der Seite jener Geraden AB immer hohl ist), dieser gleich sein muß, und zwar, indem ich meine Beweisgründe von den Tangenten dieser Kurve hernehme. Darauf beweise ich in den beiden Anmerkungen zu demselben Lehrsatz, ohne die Giltigkeit einer besonderen der drei Hypothesen vorauszusetzen, wiederum zweimal die Gleichheit der so erzeugten Linie CD mit der Grundlinie AB , gleichgiltig welche Beschaffenheit man sonst der so erzeugten Linie CD zuschreibt.

Erkennt man nun an, daß die Gleichheit jener Kurve CKD , wie sie aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringt, mit der Grund- 99 linie AB auf die erste Art wirklich bewiesen ist, so bekommt man eine überzeugende Widerlegung, denn bei derselben Hypothese läßt sich offenbar nachweisen, daß CKD größer ist. Erkennt man aber an, daß die Gleichheit auf eine der beiden andern Arten bewiesen ist, so wird auch dann die Widerlegung der Hypothese des spitzen Winkels mit nichten versagen. Der Grund liegt darin, daß CD zwar sehr gut krumm und nichtsdestoweniger der Geraden AB gleich sein kann, wenn nur CD immer auf jener Seite gewölbt, und somit die Verbindungsgerade derselben Punkte C und D kleiner ist als die gegenüberliegende Grundlinie AB , was bei der Hypothese des stumpfen Winkels eintritt; daß es aber durchaus ein Widerspruch ist, wenn CD auf derselben Seite immer hohl und somit die genannte Verbindungsgerade jener Punkte C und D größer ist als die gegenüberliegende Grundlinie AB , was bei der Hypothese des spitzen Winkels eintritt. In dieser Weise ist die Sache bereits in der Anmerkung zu dem vorhergehenden Lehrsatz auseinandergesetzt worden. Freilich leuchtet ein, daß hieraus keine Widerlegung der Hypothese des stumpfen Winkels folgt, daß vielmehr auf diese Art einzig und allein die Hypothese des spitzen Winkels zerstört wird.

Vielleicht könnte aber hier jemand fragen, warum ich so besorgt bin nachzuweisen, daß die Widerlegung der beiden falschen Hypothesen unanfechtbar ist. Deshalb, erwiedere ich, weil daraus hervorgeht, daß Euklid nicht ohne genügenden Grund jenes berühmte

Axiom als an und für sich einleuchtend angenommen hat. Denn grade darin scheint, sozusagen, der Charakter jeder Grundwahrheit zu liegen, daß sie nur, indem die Wahrheit ihres Gegenteils gründlich widerlegt wird, in ihr altes Recht wieder eingesetzt werden kann. Und ich darf sagen, daß mir dies von meiner Jugend an bei der Untersuchung einiger Grundwahrheiten geglückt ist, wie aus meiner Logica demonstrativa [1692, 1701] hervorgeht.

Nummehr kann ich mich dazu wenden, auseinanderzusetzen, warum ich in dem Vorwort an den Leser gesagt habe: *gewisse Leute hätten nicht ohne einen groben Verstofs gegen die strenge Logik Paare gleichweit*
 100 *entfernter gerader Linien von vorn herein als gegeben angenommen.* Dabei muß ich ausdrücklich erklären, daß ich hiermit keinen von denen angreife, die ich in meinem Buche, wenn auch nur mittelbar, genannt habe; denn sie sind wahrhaft große Geometer und von diesem Verstofse unzweifelhaft frei.

Ich sage aber: *einen groben Verstofs gegen die strenge Logik*, denn was heisst: *zwei gleich weit entfernte gerade Linien* als gegeben annehmen andres, als entweder verlangen, daß jede Linie, die in derselben Ebene von einer angenommenen Geraden gleich weit entfernt ist, wieder eine gerade Linie sei, oder wenigstens annehmen, daß eine gewisse gleich weit entfernte Linie eine gerade Linie sein kann, sodaß man also eine solche entweder auf Grund einer Hypothese oder auf Grund einer Forderung in der betreffenden Entfernung von der andern annehmen darf? Unzweifelhaft kann man keins von beiden als an sich einleuchtend einschmuggeln, denn daß der reine Begriff einer Linie, die in allen ihren Punkten von einer angenommenen geraden Linie gleich weit entfernt ist, mit dem ursprünglichen Begriffe der geraden Linie zusammenfällt, ist keineswegs unmittelbar klar. Zwei gerade Linien für *parallel* zu erklären, *wenn sie gleich weit von einander entfernt sind*, ist deshalb ein Fehler, den ich in meiner Logik den der *zweideutigen Erklärung* nenne; bei einer solchen ist aber jeder Versuch, zur unbedingten Wahrheit zu gelangen, nutzlos.

Ich finde jedoch, daß noch eine Bemerkung gemacht werden muß. Wir alle wollen zugeben, daß die Verbindungslinie der Endpunkte aller Senkrechten, die in ein und derselben Ebene nach derselben Seite in den einzelnen Punkten einer angenommenen geraden Linie *AB* errichtet sind, sowohl der genannten Geraden *AB* gleich als auch selbst eine Gerade sein muß. Ich behaupte aber: Wir erkennen zuerst, daß sie gleich ist, und erst dann, daß sie gerade ist. Da man sich nämlich vorstellen kann, daß die einzelnen Punkte jener Geraden *AB* immer gleichmäßig auf ihren Senkrechten fortschreiten,

bis sie endlich jene gewisse Linie CD bilden, so muß einleuchten, daß die so erzeugte Linie CD , wie sie auch sonst beschaffen sei, gleich AB ist, besonders wenn man die Auseinandersetzung berücksichtigt, die in der Anmerkung II hinter Lehrsatz XXXVII enthalten ist, wo dieser Punkt auf das Deutlichste bewiesen wurde.

Indes bleibt alsdann noch eine große Schwierigkeit, nämlich zu beweisen, daß die so erzeugte Kurve CD nur eine gerade Linie sein kann. Und daher kommt es, wie mir scheint, daß man, um leichter von der Stelle zu kommen, einem allgemein verbreiteten Vorurteile nachgebend, lieber von vorn herein angenommen hat, CD sei eine gerade Linie, um daraus abzuleiten, daß es der Grundlinie AB gleich ist, und um nachher die rechten Winkel an der Verbindungsgeraden CD einzuführen.

Ich sage aber: *eine große Schwierigkeit*, denn es mussten zuerst die drei Hypothesen in Betreff der Winkel an der Verbindungsgeraden CD eingeführt werden, die rechte sind, wenn CD gleich der Grundlinie AB ist, oder stumpf, wenn es kleiner, oder spitz, wenn es größer ist. Dann aber mußte gezeigt werden, daß die krumme Linie, die (bei der Hypothese des spitzen Winkels) die Endpunkte jener gleichen Senkrechten verbindet, auf der Seite von AB nur hohl sein könne, und daß wiederum die andre Kurve, die (bei der Hypothese des stumpfen Winkels) die Endpunkte derselben Senkrechten verbindet, auf der genannten Seite nur gewölbt sein könne. Nunmehr aber mußte hieraus die Unrichtigkeit der Hypothese des spitzen Winkels nachgewiesen werden, weil die Linie, welche die Endpunkte der genannten Senkrechten verbindet, der Grundlinie AB nicht gleich, sondern vielmehr (wie die Anschauung unmittelbar lehrt) größer ist als jene Verbindungsgerade CD , die nach der Beschaffenheit eben dieser Hypothese größer ist als die genannte Grundlinie AB . Daß aber die Hypothese des stumpfen Winkels sich selbst widerspricht, mußte anderswoher gezeigt werden, so wie es in Lehrsatz XIV geschehen ist. Aber damit sei es nun genug.

Ende des ersten Buches.

Abweichungen vom Urtext.

- S. 60, Z. 18 v. o. (S. 13, Z. 3 v. u.). Im Urtext steht I. 18 statt: I. 19.
 S. 61, Z. 7 v. o. (S. 13, Z. 14 v. o.) *AP* statt: *AD*.
 S. 62, Z. 10 v. u. (S. 15, Z. 11 v. o.) I. 4 statt: I. 5.
 S. 72, Z. 10 v. o. (S. 25, Z. 3 v. u.) XXV statt: XXVII.
 S. 74, Z. 18 v. u. (S. 28, Z. 9 v. u.) (nach Lehrsatz III) statt: (nach Lehrsatz I, VII und XVI).
 S. 86, Z. 16, 25 v. o. (S. 42, Z. 17, 8 v. u.) *B, D, H, P* statt: *B, H, D, P* und *YDH, YHP* statt: *YHD, YDP*.
 S. 102, Z. 9 v. o. (S. 61, Z. 13 v. u.) I. 18 statt: I. 19.
 S. 102, Z. 11 v. u. (S. 62, Z. 7 v. o.) *NC* statt: *MC*.
 S. 119, Z. 2 v. o. (S. 82, Z. 3 v. o.) XI. 4 statt: XI. 1
 S. 125, Z. 6 v. o. (S. 89, Z. 14 v. o.) I. 18 statt: I. 19.

Druckfehler, die bereits im Druckfehlerverzeichnisse des Originals (S. XVI) angeführt sind oder die das Verständnis des Textes nicht stören, wie die häufige Vertauschung von *n* und *u*, *f* und *l*, *r* und *t*, haben wir hier unberücksichtigt gelassen. Die in runde Klammern eingeschlossenen Seitenzahlen beziehen sich auf die Originalausgabe.

JOHANN HEINRICH LAMBERT

1728—1777.

Mit Johann Heinrich Lambert kommen wir nach Deutschland. Wir wollen daher zunächst berichten, wie sich die Entwicklung der Parallelentheorie dort gestaltet hatte.

In der Einleitung zu Wallis ist bereits der vortreffliche Euklid-Kommentar des Jesuiten Christoph Schlüssel (1574) besprochen worden. Aber erst nach einem Zeitraume von fast zweihundert Jahren begegnet uns in Deutschland wieder eine Veröffentlichung, die erwähnt zu werden verdient; denn die scharfsinnigen Bemerkungen, die Leibniz über die Grundlagen der Geometrie gemacht hatte, sind erst in diesem Jahrhunderte aus seinem Nachlasse ans Licht gezogen worden. Das Interesse für die Parallelentheorie erwacht erst wieder in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts, und zwar war es Abraham Gotthelf Kaestner (1719—1800), der die Wichtigkeit der Untersuchungen über die fünfte Forderung erkannte, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen Gegenstand lenkte und damit eine Bewegung einleitete, die erst in diesem Jahrhunderte ihren Abschlufs gefunden hat.

In der Vorrede zu seinen weitverbreiteten Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie, deren erste Auflage im Jahre 1757 erschienen ist, erzählt uns Kaestner Folgendes:

„Die Schwierigkeit, welche bei der Lehre von den Parallellinien sich findet, hat mich schon viele Jahre beschäftigt. Ich glaubte, sie wäre durch Hausens *Elementis matheseos* [1734] völlig gehoben. Der vormahlige Prediger bei der französischen Gemeinde in Leipzig Mr. Coste benahm mir diese Zufriedenheit, als er mir einmahl bei dem Umgange, den er mir oft gönnete, anzeigte, es sey an dem angeführten Orte von Hausen ein Schlufs gemacht worden, der nicht folge. Ich entdeckte diesen Fehler bald selbst und bemühte mich von der Zeit an, die Schwierigkeit selbst zu heben oder Schriftsteller zu finden, die sie gehoben hätten, aber in beider Absicht vergebens, ob ich gleich fast eine kleine Bibliothek von einzelnen Schriften oder Anfangsgründen der Geometrie sammelte, wo dieser Gegenstand war besonders betrachtet worden. Nachdem gegenwärtige Arbeit mich veranlasset die Sache von neuem zu überlegen, so habe ich kein Ver-

fahren finden können, das meiner Befriedigung näher käme als dasjenige, das ich in dem Zusatze des elften Satzes und im zwölften Satze gewählt habe.“

Dieses Verfahren besteht darin, daß, ähnlich wie es bei Wallis geschieht, die eine der beiden schneidenden Geraden parallel mit sich selbst verschoben wird. Liegt ihr Schnittpunkt mit der Grundlinie in der Nähe des Schnittpunktes der zweiten Geraden mit der Grundlinie, so findet ein Zusammentreffen der beiden schneidenden Geraden statt. „Man sieht aber nicht“, fährt Kaestner fort, „wie bloß die längere Grundlinie die Dreiecke unmöglich machen soll, man wird vielmehr urtheilen, daß bei einer längeren Grundlinie nur die Seiten bis zum Zusammentreffen weiter müssen fortgeschoben werden.“

Kaestners Interesse für die Parallelentheorie zeigte sich jedoch nicht nur darin, daß er die betreffenden Schriften sammelte — das 1801 veröffentlichte Verzeichnis seiner Büchersammlung, die über 7000 Werke umfaßte, enthält fast alles, was über diesen Gegenstand etwa bis 1770 erschienen war — vielmehr entstand auch unter seiner Beihilfe eine noch heute wertvolle Dissertation, in der zum ersten Male eine Geschichte der Parallelentheorie gegeben wurde. Ihr Titel lautet:

Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel, Göttingen 1763. 4°. 34 Seiten, 1 Figurentafel.

Ihr Verfasser, später Professor der Mathematik in Helmstedt und in Halle, ist noch jetzt durch sein Mathematisches Wörterbuch bekannt.

Gegen dreißig Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, unter ihnen auch, wie wir schon früher erwähnten, der Versuch Saccheris, werden hier mit sehr verständiger Kritik behandelt, und immer stellt sich heraus, daß sie als Mißlungen anzusehen sind. Es ist daher erklärlich, daß Klügel (S. 16) zu der Ansicht gelangt: „Möglich wäre es freilich, daß Gerade, die sich nicht schneiden, von einander abweichen. Daß so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht in Folge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der geraden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch das Urteil unsrer Augen“, und daß Kaestner in einem Nachworte sich dahin äußert, ein Beweis für das Parallelenaxiom sei nur zu erhoffen durch eine genauere Ausbildung der Lehre von der Lage, die mit Leibniz untergegangen sei. Gegenwärtig bleibe nur übrig, offen, wie es Hütern der reinsten Wahrheit gezieme, die Forderung Euklids als solche auszusprechen; niemand, der bei gesunden Sinnen sei, werde sie ja bestreiten wollen.

Dieser Skeptizismus Kaestners scheint sich später fast noch verschärft zu haben, denn Schweikart berichtet 1807, „dafs Kaestner vor vielen Jahren schon, an der Möglichkeit der Lösung verzweifelnd, mit unbegreiflicher Resignation, anstatt nach der wahren Demonstration zu forschen, ein blindes Annehmen öffentlich anrieth“.

Klügels Dissertation hat noch ein andres Interesse, sie scheint die Veranlassung gewesen zu sein, dafs Johann Heinrich Lambert der Parallelen-theorie seine Aufmerksamkeit zuwandte (vergl. S. 155).

Indem wir zu den Untersuchungen dieses merkwürdigen Mannes übergehen, wollen wir zunächst über seinen Lebenslauf berichten. Lambert ist am 26. August 1728 in der Stadt Mühlhausen im Ober-Elsafs geboren, die seit 1506 der Schweizer Eidgenossenschaft „zugewendet“ war. Diese Verbindung hat erst 1798 aufgehört, wo Mühlhausen von der französischen Republik weggenommen wurde. Lambert betrachtete sich selbst als Schweizer — er nennt sich Muelhusio-Helvetus —, und als er nach mancherlei Irrfahrten 1764 nach Berlin kam, nahm ihn die einflußreiche schweizerische Kolonie als Landsmann auf. Bald darauf wurde er Mitglied der Akademie; in Berlin hat er dann die letzten dreizehn Jahre seines Lebens zugebracht. Genauerer über sein Leben sowie über seine hervorragenden Leistungen in der Mathematik, der Physik und der Philosophie findet man in den Schriften, die am Schlusse dieser Einleitung angeführt sind.

Lambert hat seine „Theorie der Parallellinien“ nicht selbst veröffentlicht, wahrscheinlich weil sie ihn noch nicht befriedigte. Erst 1786 ist die Abhandlung aus Lamberts Nachlaß durch Johann Bernoulli, einen Enkel des bekannten Baseler Mathematikers gleichen Namens, herausgegeben worden. Bernoulli sagt in einer Anmerkung, sie sei im September 1766 aufgesetzt. Dafs sich Lambert um diese Zeit mit dem ersten Buche der Elemente eingehend beschäftigt hat, zeigt eine Stelle in einem Briefe an den Baron Georg Jonathan von Holland (1742—1784). In diesem Briefe, der vom 11. April 1765 datiert ist, äußert sich Lambert über Euklids Verfahren in folgender Weise (Lamberts Briefwechsel, Teil I, S. 28—30):

„Ich stelle mir nun Euclidens Verfahren so vor:

1. Dafs Euclid seine Definitionen vorausschickt und aufhäuft, das ist gleichsam nur eine Nomenclatur. Er thut dabei weiter nichts als was z. B. ein Uhrmacher oder anderer Künstler thut, wenn er anfängt, seinem Lehrjungen die Namen seiner Werkzeuge bekannt zu machen.

2. Dabey ist es Eucliden genug, wenn man ihm einräumt, daß es solche Figuren gebe, sollte es auch nur eine seyn.
3. Hingegen fordert er die unbedingte Möglichkeit gerader Linien und Circul von jeder Gröfse und Lage. Et hoc si dederis, danda sunt omnia*). Denn
4. Sogleich trägt Euclid eine Aufgabe vor, um denen, welche ihm die allgemeine und *unbedingte* Möglichkeit eines gleichseitigen \triangle [Triangels] in Zweifel ziehen wollten, ex concessis postulatis zu zeigen, wie sie ihn von jeder Gröfse machen können.
5. Vermittelst dieser ersten Aufgabe zeigt Euclid in der zweiten, wie man eine Linie von gegebener Länge hintragen könne, wo man will.
6. Im folgenden zeigt er sodann, daß in jedem \triangle zwei Seiten größer sein müssen, als die dritte, und daß demnach *unter dieser Bedingung* Triangel von jeder Gestalt und Gröfse *möglich* sind. Dieses hätte man ihm aus der blofsen Definition des \triangle nicht eingeräumt.
7. In Ansehung der Parallellinien ist dieses Verfahren noch augenscheinlicher, weil die Definition von derselben Möglichkeit gar nichts angiebt. Denn man müfste sie sich gerade und beiderseits ins *Unendliche* verlängert vorstellen können.
8. In den Beweisen braucht Euclid den Ausdruck per definitionem im geringsten nicht anders als den Ausdruck per hypothesin. Denn bis die Möglichkeit des Begriffs nicht erwiesen ist, ist die Definition nur noch eine Hypothesis. Ist es für sich oder auch nur durch ein einziges Beyspiel klar, daß es wenigstens einige solcher Figuren giebt, die die Definition anzeigt, so mag die Definition vorausgeschickt werden, und zwar als eine blofse Benennung. Die Bedingungen ihrer Möglichkeit müssen aber aus Grundsätzen und Postulatis folgen. Dies ist der Fall von dem \triangle (Nr. 6). Die Definition der Parallellinien ist schlechthin eine Hypothese bis ihre Möglichkeit erwiesen wird, und da wird die Definition zum Subjekt (Alethiol. § 242**)).

Dieses ist nun meines Erachtens die Art, wie Euclid mit Definitionen und Begriffen umgeht.“

Trotz sorgfältiger Nachforschungen ist es uns nicht gelungen, in

*) [Cicero, de finibus bonorum et malorum, lib. V. 83.]

**) [Gemeint ist der Abschnitt Alethiologie aus Lamberts Werk: Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein. Riga 1764.]

den zahlreichen Schriften Lamberts weitere Bemerkungen über die Parallelentheorie aufzufinden; höchstens wäre zu erwähnen, daß er in einem Briefe an Klügel vom 3. Juli 1773 äußert, er besitze dessen Dissertation über die Parallellinien. Dagegen haben wir Grund zu der Vermutung, daß in dem nicht veröffentlichten Teile des Nachlasses solche Bemerkungen enthalten waren; unsre erfolglosen Bemühungen, den Verbleib dieser Papiere zu ermitteln, werden nachher zur Sprache kommen.

Bei dem Versuche, die Bedeutung der Untersuchungen Lamberts zu kennzeichnen, werden wir naturgemäß Saccheris *Euclides ab omni naevo vindicatus* zur Vergleichung heranziehen; wir möchten jedoch ausdrücklich bemerken, daß nach unsrer Überzeugung Lambert von diesem Werke nur das Wenige gekannt hat, was Klügel in seiner Dissertation mitgeteilt hatte.

Lamberts „Theorie der Parallellinien“ gliedert sich in drei Abschnitte sehr verschiedenen Inhalts. Der erste sehr klar geschriebene und noch heute nicht veraltete Abschnitt (§ 1—11) hat den Zweck darzulegen, was es bedeutet, wenn man von einem Beweise der fünften Forderung spricht. Grade Lambert war für solche Auseinandersetzungen mathematisch-philosophischer Art der rechte Mann, denn seine Leistungen auf dem Gebiete der Philosophie stehen den mathematischen nicht nach: Kant nennt ihn mit der größten Achtung, und Lamberts Untersuchungen über Logik werden noch heute geschätzt.

In dem zweiten Abschnitte (§ 12—26) finden wir verschiedene Ansätze zu einem Beweise des Parallelenaxioms, bei deren Durchführung jedoch immer ein Rest bleibt. C. F. Hindenburg (1741—1808) hat daher im Leipziger Magazin (Jahrgang 1786, S. 361) beim Erscheinen der Lambertschen Abhandlung zu § 21 sehr richtig bemerkt:

„Was behauptet wird, der Beweis von Euklid's Grundsätze lasse sich leicht so weit treiben, daß das, was daran noch etwa zurück bleibt, nicht nur augenscheinlich richtig ist, sondern auch allen Anschein hat, daß es nachgeholt, und der Beweis dadurch ergänzt werden könne; habe ich, aus vielfältiger Erfahrung, etwas anders befunden, nemlich: Das, was etwa noch zu erweisen übrig ist, scheint anfangs eine Kleinigkeit zu seyn; aber diese anscheinende Kleinigkeit, soll sie nach aller Strenge berichtet werden, ist, wenn man genauer nachsieht, immer die Hauptsache selbst; gewöhnlich setzt sie den Satz, oder einen ihm gleichgültigen, voraus, den man eben erweisen soll.“

Übrigens ist jener Rest bei Lamberts Beweisversuchen im Grunde das Axiom Bolyais: Durch drei Punkte der Ebene kann

stets ein Kreis gelegt werden, das, sobald die gerade Linie eine unendliche Länge hat, mit der Euklidischen Forderung gleichbedeutend ist. Ähnlich verhält es sich mit dem Beweisversuche, den Lambert am Schlusse des dritten Abschnittes (§ 88) mitteilt, und dessen Unzulänglichkeit Hindenburg ebenfalls erkannt hatte. Wir vermuten, daß auch Lambert die Schwäche dieses Beweises nicht entgangen ist, und sehen hierin mit Hindenburg den Grund, der ihn bewogen hat, „die Bekanntmachung seiner Theorie aufzuschieben“.

Wir kommen nunmehr zu dem dritten und wichtigsten Abschnitte (§ 27—88), in dem Lambert seine eigentliche Theorie der Parallellinien entwickelt.

Während Saccheri von einem Vierecke $ABDC$ ausgeht, das in A und B rechte Winkel hat und bei dem die Seiten AC und BD einander gleich sind, geht Lambert von einem Viereck $ABDC$ aus, das in A , B und C rechte Winkel hat, also mit andern Worten, von einem der beiden Vierecke, die man erhält, wenn man in dem Saccherischen Viereck die Mitten der beiden Seiten AB und CD mit einander verbindet. Er ist nun, ebenso wie Saccheri, genötigt, je nachdem der Winkel BDC ein rechter, stumpfer oder spitzer ist, drei Hypothesen zu unterscheiden und bezeichnet diese Hypothesen der Reihe nach als erste, zweite und dritte Hypothese.

Lamberts Darstellung zeigt gegenüber der Saccheris wesentliche Vorzüge. Die drei Hypothesen werden getrennt von einander behandelt, und die Untersuchung der Hypothese des stumpfen Winkels ist wenigstens zum Teil unabhängig von dem Satze über den Aufsenwinkel (Euklid I. 16), der ja bei dieser Hypothese nicht mehr gültig ist. Lambert hatte auch erkannt, daß in der Annahme, CD ändere sich stetig mit AC , eine neue Voraussetzung steckt, die den Euklidischen Grundsätzen fremd ist; er zeigt daher ausdrücklich, daß die Beweise auch ohne diese Voraussetzung durchgeführt werden können, ebenso giebt er für Punkte, von denen Saccheri nur die Existenz auf Grund des Axioms der Stetigkeit erschlossen hatte, eine wirkliche Konstruktion an (§ 57). Besonders erwähnt zu werden verdient noch, daß Lambert von dem Verfahren der Umlegung ausgiebigen Gebrauch macht, während Saccheri dieses Verfahren möglichst vermeidet (vergleiche S. 55).

Ferner hat Lambert die beiden Hypothesen des spitzen und des stumpfen Winkels noch weiter verfolgt als Saccheri und insbesondere das Verhalten von zwei sich nicht schneidenden Geraden genauer untersucht. Aus dem Aufhören der Ähnlichkeit erschließt er, daß, wenn eine von jenen beiden Hypothesen stattfände, ein absolutes

Maafs der Länge vorhanden wäre. Dagegen spricht er den wichtigen Satz Saccheris, daß jede der drei Hypothesen allgemein giltig ist, sobald sie nur in einem Falle gilt, nur für seine erste Hypothese (§ 42 und 51) ausdrücklich aus; auch die Lobatschefskijschen Grenzgeraden, die uns schon bei Saccheri begegnet sind, kommen bei ihm nicht vor.

Endlich finden sich bei Lambert sehr bemerkenswerte Betrachtungen über den Flächeninhalt des Dreiecks. Er erkennt, daß dieser Flächeninhalt bei der zweiten und dritten Hypothese der Abweichung der Winkelsumme des Dreiecks von zwei Rechten proportional ist. Dies veranlaßt ihn in § 82 zu folgender Bemerkung:

„Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel sphärische nimmt, weil bei diesen sowohl die Summe der Winkel größer als 180 Gr. als auch der Überschufs dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, daß, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als daß jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schlufs machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen läßt, als es sich bey der zwoten thun liefs.“

Lambert hatte also erkannt, daß die zweite Hypothese auf der Kugel verwirklicht ist. Dieser Gedanke, die Geometrie auf der Ebene mit der Geometrie auf der Kugel zu vergleichen, ist für die neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie von entscheidender Bedeutung geworden; es genüge hier an Riemanns Habilitationsvorlesung von 1854 zu erinnern.

Aber Lambert ist weiter gegangen, indem er die für die damalige Zeit außerordentlich kühne Vermutung aussprach, daß für die dritte Hypothese eine imaginäre Kugelfläche dasselbe leiste; diese Vermutung war, wie wir jetzt wissen, durchaus richtig. Überhaupt war Lambert ein wunderbarer prophetischer Blick eigen. Gab er doch 1767 den ersten Beweis für die Irrationalität der Zahl π und behauptete gleichzeitig die Transcendenz dieser Zahl, die zu beweisen erst mehr als hundert Jahre später gelungen ist.

Daß Lambert das Imaginäre heranzieht, kann nicht über-

raschen, denn auch sonst hatte er, seinen Zeitgenossen vorausseilend, keine Scheu vor dem Imaginären. Bezeichnend für ihn ist die Äußerung: „Das Zeichen $\sqrt{-1}$ stellt ein nicht gedenkbares Unding dar, und doch kann es Lehrsätze zu finden gut gebraucht werden“. Sie findet sich in einem Briefe an Kant aus dem Jahre 1770 (Briefwechsel, Teil I. S. 365).

Da Lambert die imaginäre Kugel im Zusammenhange mit dem Flächeninhalte des Dreiecks nennt, so scheint es nicht ausgeschlossen, daß er in der Formel:

$$r^2(A + B + C - \pi)$$

für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln A , B , C auf einer Kugel vom Halbmesser r an die Stelle von r :

$$\sqrt{-1} \cdot r$$

gesetzt hat, denn so mußte er den Ausdruck:

$$r^2(\pi - A - B - C)$$

erhalten, der ihm zeigte, daß auf der imaginären Kugel der Flächeninhalt des Dreiecks ebenfalls der Abweichung von zwei Rechten proportional ist, und daß die Winkelsumme $A+B+C$ nicht größer als zwei Rechte ausfällt, genau ebenso, wie es die dritte Hypothese mit sich bringt.

Lobatschefskij hat 1837 seine Geometrie, die der dritten Hypothese Lamberts entspricht, *Géométrie imaginaire* genannt, weil ihre trigonometrischen Formeln aus denen für das sphärische Dreieck hervorgehen, wenn man die Seiten als imaginär ansieht, oder, was dasselbe ist, wie Wolfgang Bolyai 1851 hervorgehoben hat, wenn man den Halbmesser der Kugel imaginär setzt.

Gauß sagt in einem Briefe an Schumacher vom 12. Juli 1831, in der nichteuklidischen Geometrie gelte für den Umfang eines Kreises vom Halbmesser ϱ der Ausdruck:

$$\pi r \left(e^{\frac{\varrho}{r}} - e^{-\frac{\varrho}{r}} \right),$$

in dem r eine Konstante bedeutet. Das ist aber nichts andres als der elementare Ausdruck für den Umfang eines Kreises vom Halbmesser ϱ auf einer Kugel vom Halbmesser r , nachdem man $\sqrt{-1} \cdot r$ an die Stelle von r gesetzt hat.

Hat Lambert auch von diesen Zusammenhängen etwas geahnt? Merkwürdig ist jedenfalls der Umstand, daß grade er sich mit den Werten der trigonometrischen Funktionen für ein rein imaginäres Argument eingehend beschäftigt hat, und zwar zu einer Zeit, die der Abfassung seiner Parallelentheorie

unmittelbar folgt. Im September 1766 hatte er diese Abhandlung aufgesetzt, im September 1767 (Briefwechsel, Teil I, S. 254) las er in der Berliner Akademie seine Abhandlung: *Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*, und er setzte diese Untersuchungen später in den *Observations trigonométriques* fort.

In der ersten dieser beiden Abhandlungen zeigt Lambert, daß die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen einen reellen Sinn behalten, wenn die Argumente rein imaginär werden. An Stelle des Kreises tritt dann die gleichseitige Hyperbel, und man gelangt so zu einer „hyperbolischen Trigonometrie“. Allerdings führte Lambert hier nur einen Gedanken aus, den bereits Vincentio Riccati und Daviet de Foncenex zu entwickeln begonnen hatten. In der zweiten Abhandlung werden die hyperbolischen Funktionen benutzt zur Lösung von Aufgaben aus der sphärischen Astronomie; sie dienen dazu, die Formeln zu vereinfachen und für die Rechnung mit Logarithmen geschickter zu machen. Freilich hat Lambert — wie wir ausdrücklich hervorheben wollen — in keiner der beiden Abhandlungen bei Formeln der sphärischen Trigonometrie den Halbmesser imaginär gesetzt, aber die Thatsache, daß diese Formeln auch bei einer solchen Annahme einen reellen Sinn behalten, würde für ihn sicher nichts Überraschendes gehabt haben.

Als Lamberts Theorie der Parallellinien im Jahre 1786 veröffentlicht wurde, war das Interesse für diesen Gegenstand in Deutschland und Frankreich bereits sehr lebhaft. Etwa seit 1781 beginnt die Zahl der Veröffentlichungen über Parallelentheorie beständig zuzunehmen, und das Jahr 1786 weist in unserm Verzeichnis nicht weniger als sieben solcher Schriften auf; wenn auch die späteren Jahre meistens kleinere Zahlen aufweisen, so ist doch während des nächsten halben Jahrhunderts kaum ein Jahr vergangen, in dem nicht wenigstens ein neuer Beweisversuch zum Vorschein kam. Lamberts Abhandlung, das Bedeutendste, was, neben Saccheris *Euclides ab omni naevo vindicatus*, auf dem Gebiete der Parallelentheorie bis zu den Arbeiten von Lobatschewskij und Bolyai veröffentlicht worden ist, hat freilich auf diese Bemühungen keinen Einfluß gehabt; sie wird zwar in den Litteraturverzeichnissen wiederholt aufgeführt, ein genaueres Eingehen auf ihren Inhalt haben wir jedoch nur selten, eine Weiterführung von Lamberts Ideen überhaupt nicht angetroffen.

Zunächst kommt hier eine Abhandlung C. F. Hindenburgs in

Betracht, die sich in dem Magazin für Mathematik unmittelbar an Lamberts Parallelentheorie anschließt; wir haben sie schon auf S. 143 ausreichend erwähnt. Dann hat C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation vom Jahre 1824, die wir in der Einleitung zu Saccheri anführten, auf die Ähnlichkeit der Betrachtungen dieser beiden Forscher hingewiesen. Endlich verdient noch Erwähnung, daß Bessel in einem Briefe an Gauß vom 10. Februar 1829 sich auf Lambert beruft:

„Durch das, was Lambert gesagt hat und was Schweikard mündlich äußerte, ist mir klar geworden, daß unsere Geometrie unvollständig ist und eine Korrektion erhalten sollte, welche hypothetisch ist, und wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks $= 180^\circ$ ist, verschwindet. Das wäre die wahre Geometrie, die Euklidische aber die praktische, wenigstens für die Figuren auf der Erde.“

In der späteren Zeit ist Lamberts Abhandlung gänzlich in Vergessenheit geraten*).

Wir wollen jetzt noch ein paar Worte sagen über unsern Neudruck von Lamberts Theorie der Parallellinien.

Als Lambert am 25. September 1777 gestorben war, untersuchte sein Landsmann Johann Georg Sulzer, der bekannte Ästhetiker, die hinterlassenen zahlreichen Handschriften und fand so viel Wichtiges, daß er der Berliner Akademie den Ankauf anriet, der auch gegen eine beträchtliche Summe, die den Erben ausgezahlt wurde, zu Stande kam. Die Akademie überließ den Nachlaß Lamberts „unter annehmblichen Bedingungen“ einem ihrer Mitglieder, dem damaligen Direktor der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Johann Bernoulli (1744—1807), „damit er einen für das gelehrte Publikum nützlichen Gebrauch davon machen sollte“. So erzählt uns Bernoulli in einer „Nachricht an die Gelehrten, von Johann Heinrich Lamberts hinterlassenen Schriften“, die er 1781 in dem Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Ökonomie (S. 291—292) veröffentlichte; auf diese Quelle sind wir angewiesen, da die Akten der Berliner Akademie nichts auf die Angelegenheit Bezügliches enthalten.

In dieser „Nachricht“ teilt Bernoulli weiter mit, daß er den Nachlaß Lamberts geordnet habe, und zeigt an, „zu welchen Schriften er den Gelehrten Hoffnung machen könne“. Es sind dies:

*) Die Schrift: *Théorie des parallèles par Lambert*, Tours 1859 ist nicht etwa eine Übersetzung von Joh. Heinr. Lamberts Theorie der Parallellinien, sondern hat einen Colonel du génie César Lambert zum Verfasser.

1) „ein Monatsbuch oder eine Art Tagebuch, in welchem Lambert von 1752 an bis zu seinem Ende von Monat zu Monat kurz aufzuzeichnen pflegte, mit welchen gelehrten Arbeiten und Untersuchungen er sich den ganzen Monat hindurch beschäftigt hatte. Wird sehr merkwürdig und lehrreich befunden werden.“

2) „Lamberts Briefwechsel mit unzähligen, zum Theil sehr berühmten Gelehrten: Philosophen, Mathematiker, Physiker, Astronomen, Litteratoren u. s. w. Wird etliche Bände betragen.“

3) „Materialien zu ein Paar Bänden philosophischer und philologischer Abhandlungen.“

4) „Vermischte Abhandlungen zu den mathematischen und physikalischen Wissenschaften gehörig, die etwa zwey Bände ausmachen werden und als eine Fortsetzung der bekannten in drei Theilen erschienenen Beyträge anzusehen sind.“

Bernoulli eröffnete nun eine Subskription auf Lamberts Hinterlassene Schriften, aber leider fand, wie er 1783 klagt, „das Unternehmen wenige Beförderer“. So sind denn „nach manchen überstandenen Hindernissen“ nur die logischen und philosophischen Abhandlungen in zwei Bänden (Berlin 1781 und 1789) und der Deutsche gelehrte Briefwechsel in fünf Bänden (Berlin 1781 bis 1787) erschienen.

Die mathematischen und physikalischen Abhandlungen wären uns wohl verloren gegangen, wenn nicht Bernoulli zusammen mit C. F. Hindenburg eine Zeitschrift rein mathematischen Inhalts ins Leben gerufen hätte, wohl die erste ihrer Art, das Magazin für die reine und angewandte Mathematik, von dem das erste Stück im Dezember 1785 herauskam. Freilich erreichte diese Zeitschrift nur den dritten Jahrgang, und auch ein erneuter Versuch Hindenburgs hatte keinen dauernden Erfolg; sein Archiv für reine und angewandte Mathematik hat es von 1795 bis 1801 nur auf elf Hefte gebracht. In diesen beiden Zeitschriften wurde eine Reihe von Abhandlungen aus dem Nachlasse Lamberts abgedruckt, „indem Zeit und Umstände Herrn Bernoulli sonst noch lange hindern würden, alles das, wie anfangs beschlossen war, in einem eigenen Bande gesammelt herauszugeben.“

Die erste dieser Abhandlungen ist die Theorie der Parallellinien, die man in dem zweiten Stücke des Magazins für 1786, S. 137—164 und in dem dritten Stücke S. 325—358 findet. Im Folgenden geben wir einen getreuen Wiederabdruck dieser Abhandlung; nur einige unbedeutende Druckfehler haben wir verbessert.

Die Figuren, die im Original zwei Tafeln füllen, sind in den Text aufgenommen worden.

Gern hätten wir unserm Neudruck die Urschrift Lamberts zu Grunde gelegt, und da wir überdies vermuteten, daß der nicht veröffentlichte Teil des Nachlasses, insbesondere das Tagebuch, Bemerkungen über die Parallelentheorie enthalten könnte, haben wir uns bemüht, Genaueres über den Verbleib von Lamberts Nachlaß zu ermitteln.

Solche Nachforschungen hatte bereits 1847 Rudolf Wolf für seine Lebensbeschreibungen von Lambert und Daniel Bernoulli angestellt; es lag ihm daran, den wichtigen Briefwechsel dieser beiden Gelehrten ausfindig zu machen, der nach einer Ankündigung Bernoullis in dem ersten Bande des Französischen Briefwechsels hatte erscheinen sollen. Rudolf Wolf fand zwar auf der Berliner Sternwarte einige Handschriften Lamberts, aber sie „sind durchaus von untergeordnetem Werte und geben nicht den geringsten Aufschluß über das Schicksal der übrigen Manuskripte“; gegenwärtig sind übrigens Handschriften Lamberts dort nicht mehr vorhanden, und dasselbe gilt von dem Archive der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Auch die Königliche Bibliothek in Berlin besitzt nur drei unwichtige Briefe Lamberts an Formey. Ebenso wenig hat sich Lamberts Nachlaß in Johann Bernoullis Familie vererbt. Der einzige noch lebende Enkel, Herr Paul Bernoulli in Berlin, ist so freundlich gewesen, uns mitzuteilen, daß ihm Briefschaften aus dem Nachlasse seines Großvaters überhaupt nicht überkommen sind, und daß in den Papieren, die er besitzt, nichts auf Lambert Bezügliches zu finden gewesen ist.

Eine Möglichkeit ist allerdings noch vorhanden: Durch einen glücklichen Zufall ist es Rudolf Wolf gelungen festzustellen, daß Bernoulli in den Jahren 1793 und 1799 Teile des „großartigen Briefwechsels seiner Familie“ an die Großherzoglich Sächsische Bibliothek in Gotha verkauft hat, wo sie sich noch gegenwärtig befinden. Hat vielleicht Lamberts Nachlaß ein ähnliches Schicksal gehabt? Oder ist er 1807, als das Haus Bernoullis in Köpenick bei Berlin abbrannte, mit verbrannt?

Litteratur.

- Anding, E., *Lamberts Leben und Schriften*, Anhang zu *Lamberts Photometrie*, Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 33.
- Beez, R., *Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie*. Gymnasialprogramm, Plauen i. V. 1888. S. 18.
- Bolyai, W., *Kurzer Grundriss eines Versuches* usw. Maros Vásárhely 1851. S. 35.
- Cantor, M., Artikel *Abraham Gotthelf Kaestner* in der Deutschen Biographie, Bd. 15. Leipzig 1882, S. 439—446.
- Foncenex, Daviet de, *Réflexions sur les quantités imaginaires*, Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis. Tom. I. Turin 1759. S. 113.
- Formey, *Éloge de M. Lambert*, Histoire de l'Académie royale, Année 1778, Berlin 1780, S. 72—90.
- Günther, S., *Die Lehre von den Hyperbelfunctionen*. Halle 1881. S. 24—29.
- Hindenburg, C. F., *Noch Etwas über die Parallellinien*. Magazin für die reine und angewandte Mathematik, Jahrgang 1786. S. 359—367.
- Huber, D., *Johann Heinrich Lambert, nach seinem Leben und Wirken dargestellt*. Basel 1829, enthält:
1. Einen Vorbericht des Herausgebers über die Lambertfeier zu Mülhausen im Jahre 1828,
 2. Lamberts Leben, von *Matthias Graf*,
 3. Lamberts Verdienste um die theoretische Philosophie, von *Simon Erhardt*,
 4. Lamberts Verdienste in den mathematischen und physikalischen Wissenschaften, von *Daniel Huber*.
- Jacobi, C. F. A., *De undecimo Euclidis axioma iudicium, cui accedunt pauca de trisectione anguli*. Jena 1824.
- Lambert, J. H., *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*. Histoire de l'Académie royale. Année 1761. Berlin 1768. S. 265.
- Lambert, J. H., *Observations trigonométriques*. Histoire de l'Académie royale. Année 1768. Berlin 1770. S. 327.
- Leibniz, G. W., *Briefwechsel mit Giordano da Bitonto* aus der Zeit von 1690—1700. Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. 1. S. 196.
- Leibniz, G. W., *In Euclidis ΠΡΩΤΑ* (handschriftlich auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover), Leibnizens mathematische Schriften, Bd. 4. Halle 1858. S. 183.
- Lepsius, Joh., *Johann Heinrich Lambert*. München 1881.
- Lobatschewskij, N., *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 17. Berlin 1837. S. 299.
- Riccati, Vincentio, *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia*. Tom. I. Bologna 1757. S. 45.
- Riemann, B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsvorlesung, gehalten am 10. Juni 1854. Gesammelte Werke, 1. Aufl. S. 254—269.
- Schweikart, F. C., *Die Theorie der Parallellinien*. Jena und Leipzig 1807. S. 6.
- Wolf, R., *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, Dritter Cyklus. Zürich 1860. S. 317—356: Joh. Heinr. Lambert von Mülhausen; vgl. auch S. 195.

Theorie der Parallellinien,

von

Joh. Heinr. Lambert*).

1) Vorläufige Betrachtungen.

§. 1.

Gegenwärtige Abhandlung betrifft eine Schwierigkeit, die in den ersten Anfängen der Geometrie vorkömmt, und schon seit *Euklid's* Zeiten denjenigen anstössig gewesen, welche die Lehren dieser Wissenschaft nicht bloß andern nachglauben, sondern aus Gründen davon überzeugt seyn, und diejenige Schärfe, die sie in den meisten Beweisen fanden, nirgends missen wollten.

Diese Schwierigkeit fällt Jedem, der *Euklid's* Elemente liest, gleich anfangs in die Augen, weil sie sich nicht erst unter den Lehrsätzen, sondern selbst unter den Grundsätzen findet, die *Euklid* dem ersten Buche vorsetzt. Von diesen Grundsätzen nimmt der 11te als 138 etwas für sich Klares und keines Beweises bedürftiges an,

daß, wenn zwei Linien CD, BD (Fig. I.) von einer dritten BC

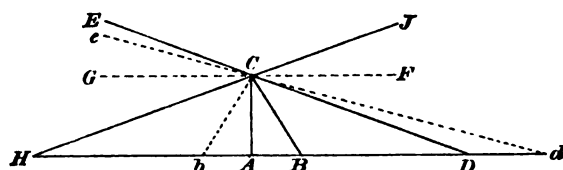


Fig. I.

durchschnitten werden, und die beyden innern Winkel DCB, DBC zusammen genommen, kleiner als zween rechte Winkel sind, die beyden Linien CD, BD gegen

D, oder auf der Seite, wo diese Winkel sind, zusammen laufen.

§. 2.

Dieser Grundsatz ist unstreitig lange nicht so klar und einleuchtend als die übrigen; und der Eindruck, den er natürlicher Weise

*) Aufgesetzt im Septemb. 1766.

macht, ist, daß man nicht nur einen Beweis davon verlangt, sondern gewissermassen empfindet, daß er eines Beweises fähig sey, oder daß es einen Beweis davon geben müsse.

Dieses ist, soviel ich mir die Sache vorstelle, der *erste* Eindruck. Lieset man aber im *Euklid* weiter fort: so muß man nicht nur die Sorgfalt und Schärfe seiner Beweise, und eine gewisse edle Einfalt in seinem Vortrage bewundern; sondern man wird über seinen 11ten Grundsatz noch um desto mehr stutzig, wenn man sieht, daß *Euklid* Sätze beweist, die man viel leichter würde ohne Beweis zugegeben haben.

Man giebt zwar vor, *Euklid* habe dieses gethan, um seine Lehren auch gegen die spitzfindigsten Einwürfe der damaligen Sophisten in Sicherheit zu setzen*). Allein wenn dieses ist: so gestehe ich, daß ich mir von diesen Sophisten keinen Begriff machen kann, wenn *Euklid* voraussetzen konnte, daß sie ihm seinen 11ten Grundsatz würden unangefochten gelten lassen, weil mit demselben der größte Theil der geometrischen Lehrsätze wegfällt. Man sollte vielmehr gedenken, daß *Euklid* und die Sophisten, wenn je diese zu *Euklid's* Zeiten nichts eingewandt haben, andre Maximen zur Beurtheilung der Grundsätze und des Vortrags der geometrischen Beweise müssen gehabt haben, als verschiedene von denen, die in den folgenden Zeiten über diese Sache gedacht, oder Schwierigkeiten wider die etwan | von andern 139 versuchten Beweise gemacht haben.

Von diesen Schwierigkeiten oder Einwendungen sind mir solche vorgekommen, wobey ordentlich vorausgesetzt werden muß, daß man, um den Euklidischen Grundsatz zu beweisen, oder überhaupt die Geometrie festzusetzen, weder *sehen* noch sich *von der Sache selbst* eine *Vorstellung* machen dürfe. Es ist unstreitig, daß man bey einer solchen Forderung den 12ten Euklidischen Grundsatz, *daß zwei gerade Linien keinen Raum schliessen*, ebenfalls wird anfechten können.

§. 3.

Es ist aber auch eben so unstreitig, daß die Sophisten zu *Euklid's* Zeiten minder strenge gewesen seyn, und die *Vorstellung der Sache* mußten zugeben haben. Mit dieser Voraussetzung aber läßt sich

*) [*Lambert* denkt wohl an folgende Äußerung von *Clairaut* (*Éléments de Géométrie*, 1741, S. X): Dieser Geometer mußte die hartnäckigen Sophisten überzeugen, die ihren Ruhm darin suchten, die augenscheinlichsten Wahrheiten anzugreifen. Deshalb mußte die Geometrie damals, ebenso wie die Logik, um Böswilligen den Mund zu stopfen, zum schulgerechten Schlussverfahren greifen. Die Sache hat sich aber geändert. Weitläufige Auseinandersetzungen über Dinge, bei denen von vornherein der gesunde Menschenverstand entscheidet, sind durchaus überflüssig und dienen nur dazu, die Wahrheit zu verdunkeln und die Leser abzuschrecken.]

Euklid's Vortrag, wenigstens in Ermangelung eines andern und mindern Schwierigkeiten unterworfenen, ganz ordentlich rechtfertigen.

Man kann nämlich den 11ten Grundsatz aufgeschoben seyn lassen, bis man zu der *Prop.* XXIX des ersten Buchs kömmt. Inzwischen lernt man ganz gewiß die *Sache selbst*, wovon in dem Grundsatze die Rede ist, *kennen*, und das, was an dem Grundsatze und dessen Vorstellung zu mangeln scheint, auch wenn man es nicht mit Worten ausdrücken kann, noch hinzudenken. In den beyden nächst vorhergehenden *Prop.* XXVII und XXVIII lernt man, daß, wenn die Winkel

$$FCB + CBD = 180 \text{ Gr.}$$

oder die Winkel $FCB = CBA$ sind, die Linien AB , CF weder gegen

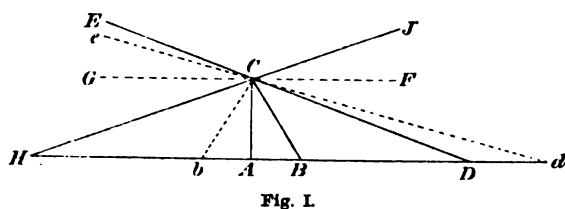


Fig. I.

F noch gegen G zusammen laufen. Man lernt dadurch, daß die 34ste Definition*) nicht ein Unding oder leeres Hirngespinnst angiebt; sondern daß nichtzu-

sammenlaufende gerade Linien im Reiche der Wahrheit wirklich vorkommen. Denn bis dahin blieb diese Definition ausgestellt; und bis dahin konnte man auch den Grundsatz ausgestellt seyn lassen, weil derselbe doch mit den Parallellinien in enger Verbindung stehet, und
140 so zu reden | zwischen Parallellinien und zusammenlaufenden Linien die Gränze bezeichnet.

Was man sich nun, um sich von der Richtigkeit und *Gedenkbarkeit* des Grundsatzes zu versichern, noch ferner *vorstellt*, kömmt meines Erachtens darauf an: Man stellt sich CF , AB nach der *Prop.* XXVII oder XXVIII als nichtzusammenlaufend vor, und gedenkt sich eine jede durch den Winkel BCF gezogene *gerade* Linie CD : und so weiß man, daß, so klein auch der Winkel DCF seyn mag, nothwendig

$$DBC + BCD < 180 \text{ Gr.}$$

ist, und demnach der Bedingung des Grundsatzes Genüge geschieht. Soll man sich nun die Folge, daß CD , BD zusammen laufen, ebenfalls vorstellen: so wird allerdings erfordert, daß man sich die Linien CF , CD , AD als *gerade* Linien *vorstelle*. Durch diese Vorstellung erhält man, daß CD verlängert, sich nicht nur von CF immer weiter entfernt, sondern auch sich gegen AD dergestalt nähert, daß sie dieselbe nothwendig in irgend einer Entfernung BD durchschneiden muß.

*) [In der Ausgabe von Heiberg ist es die 23ste.]

Wer hiebey den Einwurf macht, CD könnte sich vielleicht gegen AD auf eine asymptotische Art nähern, wie z. E. die Hyperbel und andre asymptotische krumme Linien, der ändert meines Erachtens das, was man in der Vernunftlehre *statum quaestionis* heisst, oder er weicht davon ab, daß bey *Eukliden* nicht von *Beweisen*, sondern von der *Vorstellung* und der *Gedenkbarkeit der Sache* die Rede ist; weil man es *Eukliden* ganz sicher zutrauen kann, daß er sonst seinen Satz nicht würde unter die *Grundsätze* gezählt oder gesetzt haben. Kömmt es aber auf die *Vorstellung der Sache* an: so sehe ich nicht, wie sich bey der Vorstellung *gerader* Linien Einwürfe von Hyperbeln hernehmen lassen, weil man auf eine ganz gleiche Art würde anstehen können, ob zwo gerade Linien nicht dergestalt könnten aneinander gelegt werden, daß sie einen Raum einschließen; weil es doch mit zween gleich | grossen Cirkelbogen, wenn man ihre Hölung gegen einander 141 kehrt, angeht.

Ich führe dieses nur an, um zu zeigen, daß sich mit Voraussetzung von der wirklichen Vorstellung der Sache, und wenn man nicht schlechthin nur Worte fordert, *Euklid's* Verfahren rechtfertigen lasse; um so mehr, da sein Vortrag, so viel mir bekannt ist, noch bis dermalen weniger Schwierigkeiten hat, als sich bey allen seit *Euklid's* Zeiten angestellten Versuchen, die Sache anders vorzutragen, gefunden haben. Man kann hierüber eine kurze und sehr bündig geschriebene akademische Dissertation von Hrn. *Klügel* nachlesen, worin die in solchen Versuchen zurücke gebliebenen Mängel und öfters mit untergelaufene logische Cirkel, Lücken, Sprünge, Paralogismen, unrichtig gebrauchte und gratis angenommene Definitionen und Grundsätze mit vielem Scharfsinn und vieler Mäßigung angezeigt werden.

§. 4.

Ungeachtet, wie es auch in dieser Dissertation erzählt wird, in gegenwärtigem Jahrhundert verschiedene solcher gewagten Versuche im Drucke herausgekommen: so ist doch gar kein Zweifel, daß es, besonders in Deutschland, nicht viel mehrere sollte gegeben haben, wenn *Wolf*, welcher in einem Zeitraum von 40 und mehr Jahren, in Absicht auf die herausgekommenen geometrischen Schriften, *Dux gregis* war, und es allerdings aus vielen guten Gründen zu seyn verdiente; wenn *Wolf*, sage ich, vorgemeldte Schwierigkeit, theils besser empfunden, vornehmlich aber in seinen Anfangsgründen mehr rüge gemacht hätte. Letzteres hätte aus leicht begreiflichen Gründen eine Menge Schriften darüber zum Vorschein gebracht. Ersteres würde,

so viel ich mir die Sache vorstelle, selbst auf *Wolfs* Weltweisheit einen sehr merklichen Einfluß gehabt haben.

Es liegt nicht an dem, daß *Wolf* nicht ganz ordentlich wufste, daß *willkürlich zusammengesetzte Begriffe müssen erwiesen werden*. Er
 142 schärft es in seinen beyden | Vernunftlehren, und selbst auch in seinen Vorberichten von der mathematischen Methode, ein, und erläutert es durch Beyspiele aus der Geometrie. Ich folgere aber daraus, *Wolf* müsse seine Definition von den Parallellinien nicht als einen *willkürlich zusammengesetzten Begriff* angesehen haben, weil ich ihm zutraue, er würde sonst auf einen Beweis ihrer Möglichkeit gedacht, oder wenigstens erinnert haben, daß noch etwas zurück bleibe; oder er hätte *Euklid's* Verfahren beybehalten, und so wäre die Schwierigkeit wie bey *Eukliden* in die Augen gefallen.

Untersuche ich aber, warum *Wolf*, ohne an etwas Willkürliches zu denken, sich begnügt habe, die Parallellinien *aequidistantes* zu nennen: so muß ich voraussetzen, er habe diesen Begriff nach seiner andern Methode Begriffe zu finden, das will sagen, durchs *Abstrahiren aus einzelnen Beyspielen* gefunden. Von solchen Begriffen und Definitionen sagt er, daß sie keines fernern Beweises bedürfen. Ich gebe es zu. Aber im *Vortrage* muß man sodann allerdings auch gegen die Leser die Billigkeit haben, daß man ihnen vorzeige, wie man den Begriff abstrahirt habe. Sonst können sich die Leser das Recht anmassen, zu vermuthen, es möchte ein *Vitium subreptionis* vorgegangen oder mit untergelaufen seyn. Denn Begriffe, die man aus Beyspielen abstrahirt, sind in soferne allemal auch *à posteriori*; und man kann sie nur alsdann *à priori* ansehen, wenn sie, nachdem man sie gefunden, für sich gedenkbar, das will sagen, *einfach* sind. Widrigenfalls muß man die Beyspiele den Lesern vorweisen, und von allen Behutsamkeiten bey dem Abstrahiren Rechnung geben, wenn man allen Verdacht eines *Vitii subreptionis* von sich ablehnen will.

*Bülfinger**) empfand die Nothwendigkeit dieses Verfahrens sehr wohl, und war eben dadurch besser als *Wolf* selbst im Stande, die wider die Wolfische Weltweisheit erregten Schwierigkeiten merklich
 143 zu | vermindern. Es wäre aber zu wünschen gewesen, daß *Wolf* selbst in den Hauptstücken seiner beyden Vernunftlehren, wo er theils vom Definiren, theils vom schriftlichen Vortrage dogmatischer Sätze handelt, die Nothwendigkeit und die Art ausführlich und mit allem Nachdrucke gezeigt hätte, wie man den Verdacht des *Vitii subreptionis*

*) [Georg Bernhard Bülfinger (1693—1740), *Dilucidationes philosophicae*, 1725. Vergleiche: Zeller, Geschichte der deutschen Philosophie seit Leibniz, München 1875, S. 281.]

bey Definitionen, die durchs Abstrahiren gefunden worden, im Vortrage derselben von sich ablehnen müsse.

§. 5.

Dieses wäre nun bey der Definition der Parallellinien schlechthin nicht angegangen. Denn so viel man sich auch solche vorzeichnen will: so bleiben doch zwey merkliche Unvollständigkeiten zurück. Einmal fehlt bey dem Vorzeichnen die geometrische Schärfe. Sodann ist es schlechthin unmöglich, sie beyderseits ins Unendliche fortzuziehen. Und so reicht man *à posteriori* und mit dem Abstrahiren nicht aus; und die Definition, oder besser zu sagen, die Möglichkeit der Sache muß aus andern und einfachern Gründen erwiesen werden, die für sich denkbar sind.

Wolf hat unstreitig diese Betrachtungen nicht gemacht. Man findet auch bey ihm solche Spuren, woraus sich nicht undeutlich schliessen läßt, daß er den Definitionen zu viel eingeräumt, und aus dem Grunde, daß er sie der Sache gemäß einrichten wollte, die Schwierigkeiten, die in der Sache sind, in die Definitionen gebracht habe*). Daß sie darin mehrentheils versteckter waren, als sonst in der Sache selbst, könnte man, in Absicht auf die Parallellinien, wenigstens daraus schliessen, daß in solchen Zeiten, wo eine allgemeine Demonstrirsucht die herrschendste Mode war, mehr Wesens wäre daraus gemacht worden, wenn *Wolf* in seinen Anfangsgründen der Mathematik den Euklidischen Vortrag beybehalten hätte.

§. 6.

144

Ich sagte erst, *Wolf* habe den Definitionen zu viel eingeräumt. Dieses ist nun vielmehr in der That selbst, als mit ausdrücklichen Worten geschehen; und es wurde bey vielen unvermerkt Mode, daß sie *von einer Sache gar keinen Begriff zu haben glaubten, dafern nicht der Name derselben definirt wurde*. Selbst allen Grundsätzen mußten Definitionen vorgehen, ohne welche sie nicht sollten können verstanden werden. Dabey war es nun kein Wunder, wenn der Satz, daß *eine jede Definition, ehe sie bewiesen ist, eine leere Hypothese sey*; wenn dieser Satz, den *Euklid* so genau wußte und so durchgängig beobachtete, darüber, wo nicht verloren gieng, doch sehr vergessen wurde.

Ich merke dieses hier um so mehr an, weil es in Absicht auf den Vortrag der philosophischen Wissenschaften sehr nachtheilich

*) [In einem Briefe *Lamberts* an *Kant* (Februar 1766) heisst es: „*Wolf* nahm Nominaldefinitionen gleichsam gratis an und schob oder versteckte, ohne es zu merken, alle Schwierigkeiten in dieselben“ (*Lamberts Briefwechsel*, Teil I. S. 347.)]

Folgen hatte; ingleichem, weil es eben das ist, worin *Wolf*, als er seine Methode aus *Eukliden* abstrahirte, noch zurück geblieben; und endlich, weil eben die Parallellinien das augenscheinlichste Beyspiel geben, daß eine vorausgeschickte *Definition*, bis sie nicht selbst erwiesen ist, nichts beweise.

§. 7.

Es ist falsch, daß *Euklid* irgend eine seiner Definitionen, ehe er die Möglichkeit der Sache erwiesen, anders als eine *bloße Hypothese* gebrauchte, oder sie als ein *categorisches Principium demonstrandi* ansehe. Der Ausdruck *per definitionem* gilt bey ihm nicht mehr als der Ausdruck *per hypothesin*. Sieht man auch genauer nach: so nimmt er das *Categorische* in seinen Lehrsätzen nicht von den *Definitionen*, sondern eigentlich und vornehmlich von den *Postulatis*. Von diesen gilt es eigentlich, wenn *Cicero* sagt: *Si dederis, danda sunt omnia**).

Unter den Grundsätzen finde ich vornehmlich nur den 11ten, der eine positive und die Figuren unmittelbar betreffende Kategorie ent-
 145 hält. Aber eben derselbe ist auch der Einzige, den man nicht will gelten lassen. Das Categorische darin sollte aus den *Postulatis* durch Schlüsse herausgebracht werden. Die übrigen betreffen größtentheils nur den Begriff der *Gleichheit* und *Ungleichheit*, und gehören eben darum, weil sie *Verhältnißbegriffe* betreffen, nicht zu der *Materie*, sondern eigentlich zu der *Form der Schlüsse*, die *Euklid* in seinen Beweisen macht, und in welchen sie immer nur als Obersätze vorkommen. Der 12te Grundsatz, daß *zwo gerade Linien keinen Raum schliessen*, ist verneinend, und wird von *Eukliden* eben so wie der 9te, daß *das Ganze grösser ist als sein Theil*, da gebraucht, wo der Beweis *apagogisch* ist, oder die Wahrheit des Satzes aus der Unmöglichkeit des Gegentheils erwiesen wird.

§. 8.

Dieses ist nun in einem kurzen Entwurfe der Geist der Euklidischen Methode, und zugleich dasjenige, wovon ich in *Wolfs* Vernunftlehren wenig oder nichts, in seinem Verfahren und Vortrage sehr oft das Gegentheil finde.

So z. E. glaubte *Wolf* mit mehrern andern, daß man die Schwierigkeit, die *Euklids* 11ten Grundsatz drückt, dadurch heben könne, wenn man seine Definition der Parallellinien änderte. Sie wird aber

*) [In geometria prima si dederis, danda sunt omnia. De finibus bonorum et malorum, lib. V. 83.]

dadurch weder gehoben, noch vermieden, noch auf eine geschickte Art umgegangen, und gleichsam von hinten her weggehoben. Sie wird vielmehr, wenn auch Alles richtig geht, nur *von dem Grundsatz weg*, und *in die Definition gebracht*; und zwar, so viel ich sehe, ohne daß sie dadurch leichter könnte gehoben werden. In der That auch läßt sich *Euklids* Definition ohne Rücksicht auf seinen 11ten Grundsatz beweisen. *Wolfs* Definition hingegen kann entweder ohne diesen Grundsatz nicht bewiesen werden; oder wenn sie bewiesen werden kann: so ist dieser Grundsatz so gut als zugleich mit erwiesen.

Es kömmt aber eigentlich auf die Definition | gar nicht an. Man 146 kann sie bey *Eukliden* ganz weglassen; und so wird man in der *Prop.* XXVII und XXVIII von selbst anstatt *parallelae lineae* den Ausdruck *lineae sibi non coincidentes* setzen. Man wird, aus Betrachtung, daß dieses ein merkwürdiger Umstand ist, sodann von selbst darauf verfallen, auf eine kurze und schickliche *Benennung* zu denken, oder solchen Linien, die nicht zusammen laufen, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, einen *Namen* zu geben. Und man wird dazu noch mehr verleitet werden, wenn man im Folgenden darauf verfällt, daß eben diese Linien noch überdies durchaus in gleicher Entfernung von einander bleiben.

Dies ist die eigentlich synthetische Art zu verfahren; und man denkt dabey erst dann auf die *Benennung*, wenn die Sache herausgebracht und erheblich genug ist, einen besondern Namen zu verdienen. Beyspiele davon kommen in der Mathematik unzählige vor, und sollen auch in allen denen Wissenschaften, wo man *à priori* gehen kann oder zu gehen gedenkt, nicht selten seyn.

§. 9.

Proklus, welchem *Euklid's* 11ter Grundsatz ebenfalls anstößig war, fordert deswegen einen Beweis davon, *weil derselbe, wenn man ihn umkehrt, erweisbar ist.*

In der That findet sich der umgekehrte Satz in der *Prop.* XVII. *Libr.* I. erwiesen. Mir kömmt es ebenfalls ganz richtig vor, daß es bey einem Grundsatz für sich klar seyn müsse, was es mit demselben gerade oder umgekehrt für eine Bewandniß habe. Denn, nach aller Schärfe betrachtet, soll ein Grundsatz aus lauter einfachen, und daher für sich gedenkbaren Begriffen bestehen; und es muß, ob und wiefern sie mit einander verbunden werden können, unmittelbar aus der Vorstellung der Begriffe erhellen.

So z. E. ist der achte Euklidische Grundsatz, *daßs ausgedehnte Grössen, die auf einander passen, einander gleich | sind; (Quae sibi 147*

mutuo congruunt, sunt aequalia) dieser Satz ist für sich denkbar. Es ist aber auch eben so für sich denkbar, daß er nur bey geraden Linien und Winkeln umgekehrt gilt, bey Figuren aber noch eine Bestimmung, und zwar die von der Aehnlichkeit, hinzu kommen müsse, wenn er dabey umgekehrt anwendbar seyn soll.

§. 10.

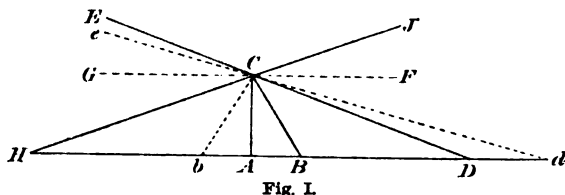
Um nun nach diesen allgemeinen Betrachtungen näher zu der Theorie der Parallellinien zu kommen, wodurch ich sowohl die Schwierigkeiten deutlich zu machen, als auch sie zu heben gedenke: so werde ich vorerst den eigentlichen *statum quaestionis* feste setzen.

Die *Frage selbst* betrifft nemlich erstlich *weder die Wahrheit noch die Denkbarkeit des Euklidischen Grundsatzes*. Es hätte um den größten Theil der Geometrie bisher übel ausgesehen, wenn dieses die Frage seyn sollte. Ich habe in Absicht auf die *Denkbarkeit* bereits oben (§. 3.) angezeigt, nach welcher Ordnung sie bey dem Durchlesen des *Euklides* entstehe. Daß der Grundsatz dadurch zugleich auch als *wahr* gedacht werde, ist für sich klar. Es wird aber die Wahrheit desselben auch aus allen Folgen, die in allen Absichten daraus gezogen werden, dergestalt erwiesen, einleuchtend und nothwendig, daß man diese Folgen, zusammengenommen, als eine auf vielfache Arten vollständige *Induction* ansehen kann.

Sodann findet sich auch bey vielen Versuchen, die man anstellen kann, um diesen Grundsatz zu beweisen, daß er, um bewiesen zu werden, fast immer sich selbst voraussetzt, und auf sehr vielerley Arten eine Folge von sich selbst ist, auf keine Art aber umgestossen wird.

Dieses mag auch ein Grund mit seyn, warum *Euklid* denselben, in Ermanglung eines Beweises, unter die Grundsätze genommen; zumal da er diejenige Definition gewählt, die ohne Rücksicht auf diesen 148 Grundsatz erweisbar war, und sich mit demselben am | unmittelbarsten verbinden liefs. Denn man sieht ganz offenbar, daß seine *Prop. XXIX*, wo dieser Grundsatz gebraucht wird, vornehmlich nur dient zu beweisen, daß es, ausser denen in den beyden *Prop. XXVII* und *XXVIII* erwiesenen Parallellinien, keine andern mehr gebe. Und in dieser Absicht wird dadurch eine in der That sehr kleine Lücke ausgefüllt, weil man sich ohne Mühe vorstellen kann, daß nur noch solche Linien aus der Zahl der nichtzusammenlaufenden auszuschließen blieben, die mit *CF* (Fig. I.) einen *kleinern* Winkel machen, als alle diejenigen Linien *CD*, *Cd*, deren Durchschnitt *D*, *d* gegeben werden kann, das will sagen, der eine *endliche* Entfernung von *A* hat. Denn,

wenn man CF um den Punkt C herunter gegen D dreht: so merkt Hr. Prof. *Kästner* mit Recht an, daß sich der erste Durchschnittspunkt nicht angeben lasse, weil, wo man ihn immer auf AD hinaus setzen wollte, noch ein entfernterer genommen werden kann.



Dieses hat aber meines

Erachtens den Erfolg, daß, wo die Winkel DCF , dCF sehr klein sind, die Entfernungen AD , Ad in umgekehrter Verhältniß der Winkel DCF , dCF , oder einer davon nicht viel verschiedenen Funktion derselben, zunehmen müssen. Denn in gerader Verhältniß der Winkel ACD , ACd , oder einer Funktion derselben, können sie deswegen nicht zunehmen, weil sonst CF , auch wo

$$DAC + ACF = 180 \text{ Gr.}$$

oder gar noch grösser ist, die Linie AD in einer endlichen Entfernung von A schneiden müßte; welches der *Prop. XXVIII. Libr. I. des Euklides* zuwider wäre.

Indessen glaube ich nicht, daß sich die Sache auf diese Art erörtern lasse; ungeachtet sich's, wenn die Sache einmal berichtet ist, leicht erweisen läßt, daß man, um jeden Winkel DCF zu halbiren, nur $Dd = DC$ zu machen habe. So giebt es auch noch andre Arten, sich die Sache vorzustellen.

Wer z. E. die beyden nichtzusammenlaufenden Linien CF , AD so ansieht, daß sie einen | Winkel machen, der $= 0$ ist: der wird leicht beweisen können, daß jede Linie Cd mit Ad einen Winkel mache, der > 0 ist, und daß demnach diese beyden Linien sich irgendwo schneiden. Der Beweis ist eben der, wodurch man zeigt, daß $CDA > CdA$ sey (*Prop. XVI. Libr. I. Euclid.*). Denn dreht man CD um den Punkt C aufwärts: so wird der Winkel CDA immer kleiner, und endlich vollends negativ, sobald CD über CF hinauf kömmt. Er muß demnach irgend $= 0$ werden; und daß dieses in der Lage CF geschehe, folgt meines Erachtens aus der Vorstellung, daß AD , CF gerade Linien sind, womit die Vorstellung von einer asymptotischen Näherung nicht bestehen kann.

Ob sich aber diese Betrachtung von negativen Winkeln, und von solchen die $= 0$ sind, in das erste Buch des *Euklides* schicke, das ist eine ganz andre Frage, die man leicht verneinen, und behaupten wird, ein solcher Vortrag sey mehr algebraisch als geometrisch.

§. 11.

Ich mag es auch gelten lassen; und merke nun ferner an, daß es bey den Schwierigkeiten über *Euklid's* 11ten Grundsatz eigentlich nur die Frage ist, ob derselbe aus den *Euklidischen Postulatis* mit Zuziehung seiner übrigen Grundsätze in richtiger Folge hergeleitet werden könne? Oder, wenn diese nicht hinreichend wären, ob sodann noch andre *Postulata* oder Grundsätze, oder Beydes könnten vorgebracht werden, die mit den *Euklidischen* gleiche Evidenz hätten, und aus welchen sein 11ter Grundsatz erwiesen werden könnte?

Bey dem ersten Theile dieser Frage kann man nun von Allem, was ich im Vorhergehenden Vorstellung der Sache genennt habe, abstrahiren. Und da *Euklid's* *Postulata* und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind: so kann und soll gefordert werden, 150 daß man sich in dem Beweise nirgends auf die | Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage — wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind *Euklid's* *Postulata* gleichsam wie eben so viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat, und aus welchen x , y , z , &c herausgebracht werden soll, ohne daß man auf die Sache selbst zurücke sehe. Da es aber nicht ganz solche Formeln sind: so kann man allerdings die Vorzeichnung einer Figur als einen Leitfaden, um den Beweis zu führen, dabey zugeben.

Hingegen würde es bey dem andern Theile der Frage ungereimt seyn, wenn man die Betrachtung und Vorstellung der Sache dabey untersagen, und fordern wollte, die neuen *Postulata* und Grundsätze müßten, ohne an die Sache zu denken, und gleichsam aus dem Stegreife gefunden werden. Ich sehe aber auch nicht, wie man gegen *Eukliden* billiger ist, wenn man seinen Grundsatz verwirft, ohne die Frage darüber so zu stellen, wie ich sie zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphs gestellt habe. Denn da *Euklid* seinen Satz einmal unter die Grundsätze rechnet: so setzt er unstreitig dabey die Vorstellung der Sache voraus; und man kann es ihm zutrauen, daß er, wenigstens in Ermangelung des noch dermalen zu findenden Vortrages, den seinigen mit Bewußtseyn gewählt habe.

Ich zweifle auch nicht, daß *Euklid* nicht selbst sollte auf Mittel gedacht haben, seinen 11ten Grundsatz unter die Lehrsätze zu bringen. Wenigstens kommen im ersten Buche seiner *Elemente* einige Spuren vor, woraus es sich nicht undeutlich abnehmen läßt. Wie leicht folgt z. E. seine *Prop. XVII* aus *Prop. XXXII*, wenn diese einmal erwiesen ist! Indessen beweist *Euklid* jene besonders, vermuthlich um zu zeigen, wie weit sich, ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes, etwas von den Winkeln eines Triangels bestimmen läßt.

2) Vortrag einiger Sätze,
die für sich betrachtet werden können.

151

[§. 12.]

Nach der Festsetzung dessen, was in Absicht auf den 11ten Euklidischen Grundsatz eigentlich die Frage ist, könnte ich nun die Theorie der Sache selbst vortragen. Ich werde aber erst den 3ten Abschnitt dieser Abhandlung dazu widmen, inzwischen aber einige Sätze beybringen, die sich, ohne Rücksicht auf diese Theorie, für sich betrachten lassen.

Ich setze dabey voraus, daß man wisse, oder wenigstens ohne Mühe finden könne, welche Sätze in dem ersten Buche der Euklidischen Elemente von dessen 11ten Grundsatz abhängen; daß z. E. bis auf die Proposit. XXIX, Alles ohne Zuziehung dieses Grundsatzes erwiesen sey, von da an aber bis zum Ende Alles mittelbar oder unmittelbar davon abhängen, wohin besonders die Bestimmung der Summe der 3 Winkel eines jeden Triangels, und Alles was von Parallelogrammen, Rectangeln und Quadraten gesagt wird, gehört.

In den folgenden Büchern trägt *Euklid* hin und wieder noch einige Sätze vor, die von seinem 11ten Grundsatz unabhängig sind. Es sind aber auch viele von denen, die auf diesem Grundsatz beruhen, von der Art, daß, wenn sie für sich erwiesen werden können, sie den Beweis des Grundsatzes selbst nach sich ziehen, so, daß man auf diese Art bey dem Aufsuchen eines Beweises für diesen Grundsatz mehr als Eine Wahl hat, wo man anfangen könne. So z. E. ist man mit dem Beweise des Grundsatzes bald fertig, wenn man, ohne Zuziehung desselben, erweisen kann, daß in jedem Triangel die Summe der 3 Winkel zween rechten Winkeln gleich ist; daß eine gerade Linie entweder von keiner oder von allen Parallellinien durchschnitten werde; u. s. w.

Da es unnöthig ist, das, was *Euklid* in seinem ersten Buche ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes erwiesen, hier von neuem | zu be- 152
weisen: so werde ich dasselbe als bekannt voraussetzen, und, wo es nöthig, die Propositionen, die ich gebrauche, citiren.

§. 13.

Es sey nun (Fig. I.) ACB ein in A rechtwinklchter Triangel; und, indem man die Seite AB verlängert, ziehe man durch C jede Linie ECD , welche AB schneide: so wird die Summe der beyden spitzen Winkel des Triangels

$$ACB + ABC > ACD,$$

und

$$ACB + ABC < ACE$$

seyn. Denn erstlich mache man $FCB = CBA$, und ziehe FCG : so ist

$$ACB + ABC = ACF;$$

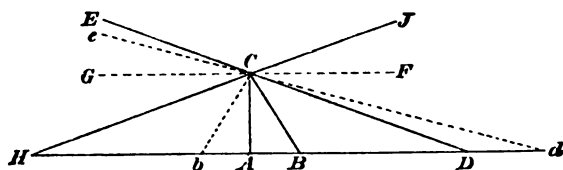


Fig. I.

und die Linie GF läuft mit HD auf keiner Seite zusammen. (*Prop. XXVII.*) Da nun CD mit HD gegen D zusammen läuft: so ist

$$ACD < ACF;$$

demnach auch

$$ACD < ACB + ABC,$$

oder

$$ACB + ABC > ACD.$$

Ferner trage man AD aus A in H , und ziehe $H CJ$ durch H , C gerade. Da nun JCH mit AH auf der Seite H zusammenläuft, FCG aber nicht: so ist wiederum

$$GCA > HCA;$$

und hingegen

$$JCA > ACF.$$

Nun ist

$$ECA = JCA,$$

weil, wenn man die Figur nach der Linie AC zusammenlegt, ECD auf JCH fällt. Demnach ist

$$ACF < ECA,$$

und daher auch

$$ACB + ABC < ECA.$$

§. 14.

Dieser Lehrsatz zeigt nun genauer, wie weit man mit der *Prop. XVII. Euclid.* in Absicht auf die Bestimmung der Summe der drey Winkel eines Triangels zurücke bleibt.

Denn einmal ist bey jedem rechtwinklichten Triangel ACB diese Summe grösser, als die Summe, welche entsteht, wenn man zu 90 Gr. 153 jeden | spitzen Winkel $ACD^*)$ addirt. Hingegen ist sie kleiner, als

*) [Damit meint Lambert: jeden spitzen Winkel ACD , bei dem AB von CD geschnitten wird. Diese spitzen Winkel besitzen eine obere Grenze, von der man von vorn herein nicht weiß, ob sie gleich einem Rechten ist. Entsprechend ist im Folgenden der stumpfe Winkel ECA zu verstehen.]

die Summe von einem rechten und jedem stumpfen Winkel ECA . Eben dieses gilt von jedem schiefwinklichten Triangel bCA ; jedoch mit dem Unterschied, daß die Summe seiner drey Winkel grösser, als jeder spitze Winkel ACD doppelt genommen, und hingegen kleiner als jeder stumpfe Winkel ACE , doppelt genommen, gefunden wird.

Man kann sich auch leicht versichern, daß das Mittel aus diesen beyden Schranken genau 180 Gr. ist, weil $ECA + ACD = 180$ Gr., demnach das Mittel davon 90 Gr. und das Doppelte von 90 Gr. = 180 Gr. ist. Ferner findet sich, daß, wenn D weiter hinaus, z. E. in d genommen wird, die beyden Schranken einander, jede um gleich viel, näher kommen, und sich daher dem Mittel gleichförmig nähern. Endlich kann man sich leicht wenigstens *vorstellen*, daß der Winkel DCF desto kleiner wird, je weiter man den Punkt D von A hinwegrückt. Und eben dadurch erhält man Schranken, die ungemein nahe zusammen treffen; und man kann daraus schliessen, daß, wenn auch die Summe der drey Winkel eines Triangels nicht genau 180 Gr. seyn sollte, sie dennoch bey jedem Triangel gar nicht viel davon verschieden seyn könne.

Dieses ist aber auch Alles, was hieraus folgt; und es wird sich dabey schwerlich weiter gehen lassen. Indessen ist der Satz eben nicht ganz unerheblich.

§. 15.

Ich werde nun noch einen andern befügen.

Die Summe der Winkel eines Triangels mag nun genau = 180 Gr. oder um etwas davon verschieden seyn: so können wir dieselbe z. E. (Fig. II) bey dem Triangel $ACB = 180 + a$ Grade setzen. Man ziehe nun durch einen der Winkel eine beliebige Linie AD : so entstehen zween Triangel ACD , ADB , und damit 6 Winkel. Die zween Winkel C , B bleiben wie vorhin. A wird auf beyde Triangel vertheilt; und die neu hinzugekommenen | Winkel CDA , ADB machen zusammen 180 Gr. (*Prop. XIII*) Demnach ist in beyden Triangeln die Summe aller 6 Winkel nur $180^\circ + 180^\circ + a$. Man hätte denken sollen, sie würde = $180^\circ + 180^\circ + a + b$ seyn. Wird von diesen Triangeln wiederum Einer, z. E. DAB durch eine Linie DE getheilt: so entstehen drey Triangel; und die Summe ihrer Winkel ist wiederum nur = $180 + 180 + 180 + a$ Grade.

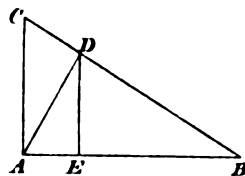


Fig. II.

Führt man weiter fort: so kömmt zu jedem neuen Triangel nur immer wiederum 180 Gr. hinzu. Man sollte allerdings daraus die

Folge ziehen können, es müsse $a = 0$ seyn*). Denn da man die Linien AD , DE , &c nach Belieben und nach unendlich vielerley Abwechselungen ziehen kann: so kömmt es eben so heraus, als wenn man in einer Reihe

$$A = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c$$

A beständig, und x veränderlich setzt. Denn da werden alle Coefficienten b, c, d , &c $= 0$; und es bleibt $A = a$, das will sagen: In jedem Triangel ist die Summe der Winkel $= 180$ Gr.

Ich führe dieses nur im Vorbeygehen an, weil daraus erhellet, dafs man noch nicht alle Mittel aufgesucht hat, die Schwierigkeit der Parallellinien zu heben.

§. 16.

Ich finde ferner, dafs Hr. Prof. *Kästner* angemerkt hat, diese Schwierigkeit komme nicht so wohl auf die Winkel, als vielmehr auf die Gröfse der Linien und auf die Entfernung der Parallellinien an.

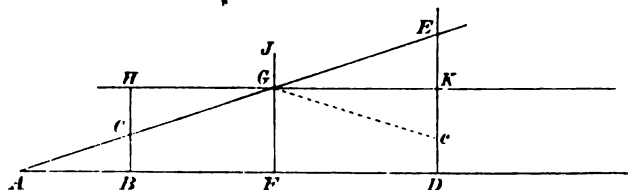


Fig. III.

Wenn z. E. (Fig. III) F ein rechter Winkel ist: so mag AGF , so wenig man will, von einem rechten Winkel verschieden, und kleiner als derselbe seyn, und es läßt sich auf GA kein Punkt angeben, aus welchem nicht sollten Perpendicularen auf GF gefällt werden können.

Ob sich aber hinwiederum durch GF keine senkrechte Linie FA ziehen lasse, die nicht auch GA in irgend einem Punkte A durchschneide, das ist allerdings eine andre Frage, welche nicht bejahet werden kann, dafern man sie nicht entweder | *directe* beweist, oder umgekehrt zeigt, dafs sich aus den Punkten A der Linie GA Perpendicularen AF auf GF fällen lassen, welche in jeder beliebigen Entfernung von G auffallen. Liefse sich aber für jeden Fall, wo die Summe der Winkel $AGF + GFA < 180$ Gr. ist, ohne Rücksicht auf die Gröfse der Linie GF , beweisen, der Winkel GAF sey > 0 ,

*) [Indem nämlich stillschweigend die Winkelsumme des Dreiecks als konstant, das heißt für jedes Dreieck gleich groß, angenommen wird. Ist aber die Winkelsumme variabel, so beweist diese Schlussweise nur, dafs es Dreiecke giebt, deren Winkelsumme beliebig wenig von 180° abweicht.]

§. 20.

Sind demnach (Fig. IV) die Winkel aAB , bBA einander gleich und kleiner als 90 Grad: so läßt sich auf erst angezeigte Art die gleichseitige und gleichwinklige Figur

$GECABDFH$

zeichnen; und wenn man fortfährt: so wird man damit im Kreise, so vielmal man will, herum kommen. Die Punkte G, E, C, A, B, D, F, H &c werden sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt O der

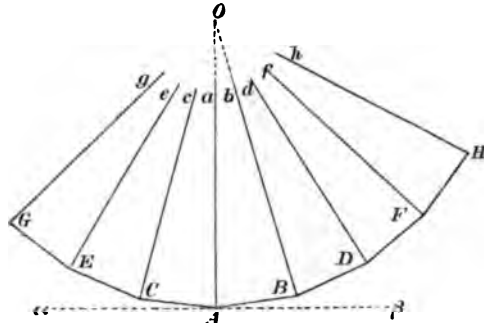


Fig. IV.

gemeinsame Durchschnittspunkt aller Linien Gg, Ee, Cc, Aa , &c seyn wird. Demnach kömmt auch hiebey die Frage, ob Aa, Bb sich durchschneiden, gleichsam zu späte und unschicklich vor.

§. 21.

Es giebt ferner mehrere Arten, einen Beweis des Euklidischen Grundsatzes so weit zu treiben, dafs das, was daran noch etwan zurücke bleibt, nicht nur augenscheinlich richtig ist, sondern auch allen Anschein hat, dafs es nachgeholt, und der Beweis dadurch ergänzt werden könne. Einige Beyspiele werden dieses ganz offenbar machen.

Es seyn (Fig. VI) die beyden Winkel aAB , bBA spitze und einander gleich: so sollen die Linien Aa, Bb zusammen laufen und sich durchschneiden.

Man mache

$$bBC = cCB = bBA,$$

und $BC = AB$: so wird $aABb$ auf $cCBb$ passen, wenn die Figur längst der Linie bB zusammen gelegt wird. Es werde ferner AC gezogen, und

$$cCD = dDC = cCA,$$

und $CD = CA$ gemacht: so wird ebenfalls wiederum $aACc$ auf $dDCc$ passen, wenn man sich die Figur längst der Linie cC zusammengelegt vorstellt. Man ziehe ferner

AD ; und wenn man eben so fortfährt, wird $aADd$ auf $eEDd$ passen.

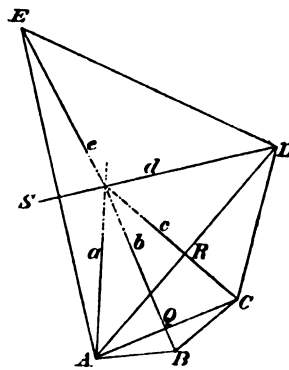


Fig. VI.

Man kann auch leicht beweisen, daß bey Q, R, S , &c rechte Winkel sind. Daß aber von den Winkeln CAB, DAC, EAD , &c jeder doppelt so groß als der nächst vorhergehende ist, das ist zwar wahr; allein ohne die vorgängige Berichtigung des Euklidischen Grundsatzes wird es sich schwerlich erweisen lassen. Doch ich verlange hierbey nicht so viel. Es wird mir genug seyn, wenn ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes erwiesen werden kann, daß DAC größer als CAB , und auf gleiche Art $EAD > DAC$, &c sey. So weit fällt die Sache in die Augen; und an sich betrachtet, sollte es leichter seyn zu beweisen, daß unter den Winkeln CAB, DAC, EAD , &c jeder folgende größer ist, als wenn man beweisen sollte, jeder sey genau doppelt so groß, als der nächst vorhergehende.

Sollte es sich aber, ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien, erweisen lassen, daß die Winkel CAB, DAC, EAD der Ordnung nach immer größer werden: so wird auch nothwendig folgen, daß von den Linien AC, AD, AE , &c Eine anfängt ausserhalb Aa zu fallen; wie denn dieses in dem Beispiele der Figur bereits schon bey der dritten dieser Linien, AE , geschieht. Dieses hat aber den Erfolg, daß die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee , &c sich nothwendig in einem Punkte durchschneiden, welcher innerhalb dem Triangel ADE liegt. Denn so muß Aa , verlängert, nothwendig die Seite ED durchschneiden; und ehe dieses geschieht, muß sie bereits
 159 schon DdS durchschnitten | haben. Daß aber alle die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee , &c sich in Einem und eben dem Punkte durchschneiden, folgt aus der Art, wie die Figur längst den Linien bB, cC, dD , &c zusammen gelegt worden, ohne Mühe; so, daß ich mich dabey eben nicht aufhalten werde.

Man sieht demnach, daß hier nur noch zu beweisen bleibt, daß wenigstens die Winkel CAB, DAC, EAD , &c immer größer werden. Uebrigens läßt sich eben so wie vorhin zeigen, daß die Punkte A, B, C, D, E , &c sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt der gesuchte Durchschnittspunkt der Linien Aa, Bb , &c ist.

§. 22.

Noch ein Beispiel. Es seyn (Fig. VII) die Winkel aAB, bBA spitze und einander gleich. Man ziehe durch den Winkel aAB jede Linie AT ; und es ist, ohne Zuziehung des oft bemeldten Euklidischen Grundsatzes, zu beweisen, daß, wenn aus der Mitte von AB die Linie Cc senkrecht aufgerichtet wird, immer der abgeschnittene Theil SR kleiner als AS sey. Kann dieses erwiesen werden: so erhält man damit so viel, daß, wenn $ST = AS$ gemacht wird, der Punkt T

schneiden, weil die aus D auf Cc fallende Perpendikulare $= CB$ und demnach $> C\beta$ ist.

§. 23.

Um dieses noch zu zeigen, so seyn (Fig. III.) in B, D rechte Winkel, und $CB < DE$. Man ziehe die Punkte C, E durch eine gerade Linie zusammen, und richte aus der Mitten von BD die Linie FG senkrecht auf. Man mache $Dc = BC$, und ziehe Gc . Wird nun die

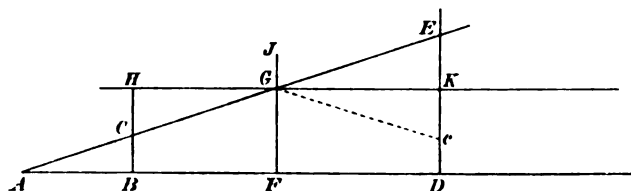


Fig. III.

Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt B auf D , C auf c , demnach GC auf Gc ; und es ist $cGF = CGF = JGE$. Da nun $EGc > 0$ ist: so sind die Winkel cGF, JGE, CGF sämtlich spitze. Demnach ist auf der Linie CE wenigstens ein Punkt G gefunden, wo dieselbe die Perpendikulare GF unter einem schiefen Winkel schneidet.

Ich merke noch im Vorbeygehen an, daß | sich der Satz um- 162 kehren läßt, indem man, wenn $CGF < 90$ Gr. ist, leicht zeigen kann, daß $CB < DE$ sey. Denn wird die Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt der Winkel CGF auf cGF , und CB auf Dc . Da nun $FGC = JGE$ kleiner als 90 Gr. ist: so ist $FGC + JGE < 180$ Gr. Demnach $EGc > 0$; demnach auch $Ec > 0$, und $ED > Dc$, oder $ED > BC$.

§. 24.

Wiederum seyn (Fig. VIII.) in C, c rechte Winkel, und $CB > cb$. Man trage CB aus C in A , und cb aus c in a , und ziehe die Linien Ab, Ba, Aa, Bb : so läßt sich die Figur längst der Linie CH zusammen legen; und es wird A auf B , a auf b , demnach Ab auf Ba fallen; und so muß der Durchschnittspunkt dieser beyden Linien E auf der Linie CH seyn.

Man mache ferner $CM = Ec$, und $CN = cb$, und ziehe NM : so werden die Winkel $NMC = bEc$ seyn; demnach auch $NMC = AEC$. Da nun auf diese Art die Linien NM, AE nicht zusammen laufen, und $CN < CA$ ist: so ist nothwendig auch $CM < CE$; demnach auch $Ec < EC$. Trägt man nun CE aus E in H , und zieht HJ auf CH

So viel also aus jeden Punkten der Linie eE Perpendikularen auf DI können gefällt werden, so viele schiefe Winkel DFH , Dfh finden sich auch, demnach allerdings unzählliche. Dieses war nun, in Absicht auf das zu Ende des §. 22. gesagte, zu beweisen. Ich habe übrigens nicht finden können, daß man ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes damit ausreiche.

§. 26.

Ließe es sich aber ohne diesen Grundsatz erweisen, daß, so oft ein Winkel $DBA < 90$ Gr. ist, auch jeder andere Winkel $DFH < 90$ Gr. sey, wo auch immer der Punkt F auf der Linie DF angenommen wird: so kann auch ohne viele Mühe erwiesen werden; daß alle | die Winkel DFH , DBA , Dfh , &c einander gleich sind.




Fig. IX.

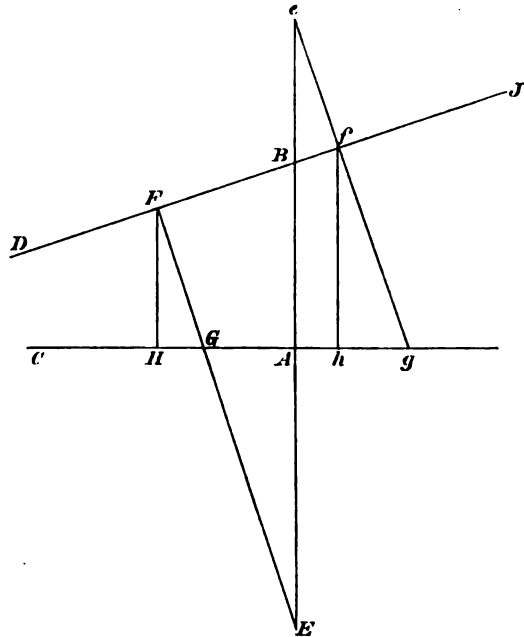


Fig. IX.

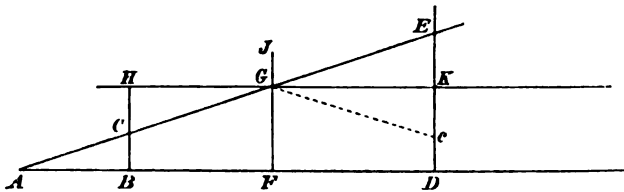


Fig. III.

Denn man setze, in der 3ten Figur in F seyen rechte Winkel, und $CGF < 90$ Gr. Man mache nach Belieben $BF = FD$, und richte in B, D , Perpendikularen auf. Oder, indem man den Punkt E nach Belieben annimmt: so fälle man aus demselben die Linie ED auf FD senkrecht, trage FD aus F in B , und richte in B die Perpendikulare BH auf. Wird nun die Figur längst der Linie FG zusammen gelegt: so wird FB auf FD , BC auf Dc fallen; und es wird

$$CGF = JGE = cGF$$

seyn. Man setze nun, die Winkel ACB , AED seyn ungleich: so sind auch GcE , GEc , und damit auch die Seiten GE , Gc ungleich. Dieses hat aber den Erfolg, daß, wenn GK durch FG senkrecht, oder welches einerley ist, mitten durch den Winkel EGc gezogen wird, die Winkel in K schief seyn werden. Damit aber würden auch die Winkel in D schief seyn. Es sind aber vermöge der Construction, in D rechte Winkel. Demnach geht es nicht an, daß man die Winkel ACB , AED ungleich setze; und so muß $ACB = AED$ seyn. Damit erhält man aber $Ge = GE = GC$; ingleichen $EKG = cKG = CHG = 90$ Grad, und $BHKD$ ist ein Rectangel α .

Ich setze diesen ohnehin kurz vorgetragenen Beweis nicht weiter fort, weil man leicht sieht, daß derselbe auf dem Satze beruhet, daß man wo KGF , DFG rechte Winkel sind, aus dem schiefen Winkel in K auf den schiefen Winkel in D schliessen könne. Dieses ist es aber eben, wovon noch ein von dem Euklidischen 11ten Grundsatz unabhängiger Beweis gefunden werden soll. Kann derselbe aber gefunden werden: so erhellet aus dem erstgesagten, daß damit zugleich auch die Gleichheit der Winkel ACB , AED und die Winkel eines Rectangels α bestimmt und erörtert sind.

§. 27.

Die Theorie der Parallellinien, die ich hier zu geben mir vorgenommen, findet ihre Stelle unmittelbar nach der *Prop. XXVIII. Libr. I.* der Elemente des *Euklids*, weil bis dahin der 11te Grundsatz nicht gebraucht wird, und auch hier nicht gebraucht werden soll. Dieses bestimmt den Gesichtspunkt, aus welchem nachfolgende Theorie anzusehen ist; und man wird sich eben deswegen damit nicht aufhalten, wenn ich sehr bekannte Sätze, wie z. E. die durchaus gleiche Entfernung der Parallellinien α als unbekannt und sehr zweifelhaft werde anzusehen haben. Auch dieses habe ich noch voraus zu erinnern, daß ich nicht bloß gedenke, solche Sätze zu beweisen, sondern zugleich auch die dawider gemachten Schwierigkeiten deutlich ins Licht zu setzen.

Daraus wird sich zeigen, daß sich die ganze Sache auf eine dreyfache Hypothese reduciren läßt, von welchen jede einer besondern Theorie fähig ist, und wovon zwo nur in ihren entfernten Folgen umgestossen werden können; so daß auch von den unmöglichen Hypo-

thesen eine ziemliche | Anzahl von Sätzen können und zum Theil

müssen erwiesen werden, bis es sich zeigt, daß sie nicht bestehen. Auf gleiche Art werden selbst von der wahren Hypothese mehrere Sätze *ex hypothesi* erwiesen, ehe es sich zeigen läßt, daß sie wirklich die wahre ist.

In der Geometrie schien mir ein solches Verfahren sehr unerwartet. Da es aber darin vorkommt: so kann es zugleich die Art, mit physischen Hypothesen umzugehen, wie durch ein Beyspiel erläutern. In dieser Absicht kann es leicht seyn, daß ich aus den beyden irrigen Hypothesen mehrere Folgen ziehe, als es, bloß um sie umzustossen, nöthig wäre.

§. 28.

Daß sich auf einer ebenen Fläche gerade Linien ziehen lassen, die, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, nicht zusammenlaufen, wird durch die *Prop.* XXVII und XXVIII ausser allen Zweifel gesetzt. Hingegen bleibt dabey unausgemacht, ob es ausser den daselbst angegebenen nicht noch andre giebt. Und selbst von denen in bemeldten beyden Propositionen erwiesenen bleiben noch mehrere Eigenschaften und Symptomata zu bestimmen. Hiebey werde ich nun den Anfang machen.

§. 29.

Es seyn (Fig. X.) in A und B rechte Winkel; oder, indem man AC durch AB senkrecht gezogen, werde AB nach Belieben angenommen, und der Winkel ABD ebenfalls $\simeq 90$ Gr. gemacht: so sind, vermöge erstbemeldter *Prop.* XXVII, XXVIII; BD , AC Linien, die beyderseits, soviel man will, verlängert, nicht zusammenlaufen.

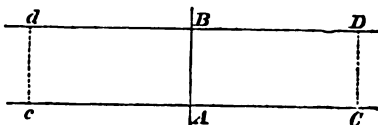


Fig. X.

Ferner läßt sich leicht zeigen, daß, wenn die Figur längs der Linie AB zusammengelegt wird, der Winkel dBA auf DBA , ingleichen cAB auf CAB , und demnach Bd auf BD , und Ac auf AC fällt, weil in A , B alles rechte Winkel sind. Die Linien dD , cC sind demnach auf beyden Seiten des Striches AB einander durchaus gleich und ähnlich, so daß, was von der einen Seite | erwiesen wird, mit Bey-327 behaltung eben der Bedingungen auch auf der andern Seite statt findet.

§. 30.

So z. E. wenn man $Ac = AC$ macht, und in c , C Perpendikularen cd , CD aufrichtet: so wird $cd = CD$, $Bd = BD$, $cdB = CDB$ seyn.

§. 31.

Eben so, wenn $Bd = BD$ gemacht wird, und man fällt aus d , D senkrechte Linien dc , DC auf cC : so wird $cA = AC$, $cdB = CDB$, und $cd = CD$ seyn.

§. 32.

Wiederum, wenn man $cA = CA$, und $dB = BD$ macht: so wird man ebenfalls $cd = CD$, $Acd = ACD$, und $BDC = Bdc$ haben.

§. 33.

Wenn es demnach noch mehrere Arten von nicht zusammenlaufenden geraden Linien geben sollte: so wird diejenige, wo A , B rechte Winkel sind, immer wegen der vollkommenen Gleichheit und Aehnlichkeit auf beyden Seiten von AB etwas voraus haben.

Der Umstand, daß dD , cC nicht zusammenlaufen, läßt noch unbestimmt, ob die Entfernungen cd , CD immer gleich sind, oder grösser oder kleiner werden. Wie dem aber auch immer sey: so weiß man, daß es auf beyden Seiten von AB durchaus einerley Beschaffenheit damit habe.

§. 34.

Man kann aber auch vermittelst schiefer Winkel gerade Linien ziehen, die nicht zusammenlaufen; und da ist allerdings die Frage, ob diese nicht von der erst betrachteten Art verschieden sind?

Es seyn z. E. (Fig. XI.) die Winkel $BAC = ABE$, oder $FAK = EBA$, oder $EBA + FAB = 180^\circ$: so folgt aus vorhin bemeldten

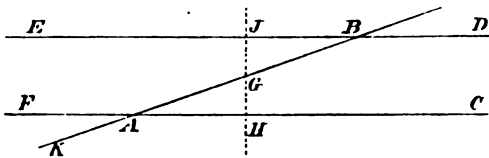


Fig. XI.

Prop. XXVII und *XXVIII*, daß die Linien ED , FC ebenfalls nicht zusammenlaufen, so viel oder wenig schief die Winkel in A und B seyn mögen. Wollte man nun auch hier die Figur

längs der Linie AB zusammenlegen: so würde man nichts Congruirendes erhalten, weil keine Linie auf die andre und kein Winkel auf den andern passen würde. Und man würde höchstens daraus schliessen können, daß sich EB gegen FA eben so, wie AC gegen BD , verhalte; so daß z. E. wenn sich EB gegen FA näherte, sich eben so AC gegen BD nähern würde.

§. 35.

Man theile aber AB in zween gleiche Theile AG , GB . Aus G fälle man GH auf AC , und GJ auf BE senkrecht: so wird man $JG = GH$, und $AH = JB$, und $AGH = BGJ$ erhalten. Und da AGB eine gerade Linie ist: so werden $AGH = BGJ$ Scheitelwinkel, und demnach JGH auch eine gerade Linie seyn. Da nun in J , H rechte Winkel sind: so läßt sich die Figur längs der Linie JH zusammenlegen; und es wird EJ auf DJ , und FH auf CH passen. Dadurch läßt sich also diese, vermittelst der schiefen Winkel A , B , gezogene Art von nicht zusammenlaufenden geraden Linien auf die vorhin betrachtete reduciren; weil hier in Absicht auf JH eben das gilt, was bey der 10ten Figur in Absicht auf AB gesagt worden.

Man kann auch den Fall umkehren. Denn man setze, daß Anfangs ED , FC durch JH senkrecht wären gezogen worden: so darf man nur $JG = GH$ machen, und durch G jede Linie AB ziehen; so wird man allemal auch $AG = GB$, und $GAH = GBJ$ erhalten.

§. 36.

Es ist hiebey angenommen worden, daß sich aus $AG = GB$, $GAH = GBJ$, und $H = J = 90$ Gr. auf die Gleichheit und Aehnlichkeit der beyden Triangel AGH , BGJ schließen lasse. Dieses hat keinen Anstand. Denn man darf nur den Winkel GBJ dergestalt auf GAH legen, daß GB auf GA falle: so wird G auf G , B auf A , und BE auf AC passen. Nun läßt sich aus G auf AC nur eine Perpendikuläre GH ziehen, weil man sonst einen Triangel mit zween rechten Winkeln erhalten würde. Demnach fällt nicht nur die Linie BE auf AC , sondern insbesondere auch der Punkt J auf den Punkt H . Und so sind die Triangel AGH , BGJ durchaus auf einander passend. 329

§. 37.

Uebrigens hätte in dem §. 35 auch schlechthin nur GH auf AC senkrecht gezogen und gegen J verlängert werden können. Denn so würde man $AG = BG$, $GAH = GBJ$, und $AGH = BGJ$ gehabt haben. Und damit wäre ebenfalls $GJB = GHA = 90$ Gr. und $GH = GJ$ gewesen. (*Prop. XXVI. Libr. I. Elem. Euclid.*)

§. 38.

Da demnach in Absicht auf die Linie JH eben das gilt, was in der 10den Figur in Absicht auf die Linie AB gesagt worden: so sind die Linien ED , FC (Fig. 11.) in der That nicht von einer von den

Linien dD , cC (Fig. 10.) verschiedenen Art. Dadurch wird aber allerdings die Theorie der Parallellinien abgekürzt, weil die Eigenschaften und Symptomata, so sich in Absicht auf die 10de Figur erweisen lassen, ohne Mühe auf die 11te Figur angewandt werden können.

§. 39.

Ich werde demnach zu der 10den Figur zurück kehren, und die Voraussetzung, dafs in A , B rechte Winkel sind, beybehalten.

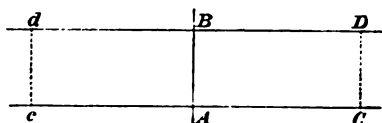


Fig. X.

Es seyn nun in C ebenfalls rechte Winkel: so laufen erstlich auch AB und CD nicht zusammen. Die Frage kömmt nun eigentlich auf die Winkel

in D an; und da müssen wir nothwendig drey Hypothesen annehmen. Denn es könnte

$$\text{I}^{\circ}. BDC = 90 \text{ Gr.}$$

$$\text{II}^{\circ}. BDC > 90 \text{ Gr.}$$

$$\text{III}^{\circ}. BDC < 90 \text{ Gr.}$$

seyn.

Diese drey Hypothesen werde ich der Ordnung nach annehmen, und Folgen daraus ziehen. Es wird sich zeigen, dafs diese Folgen ziemlich weit können und theils müssen getrieben werden, ehe man auf ein *Quod est absurdum* oder *Quod est contra hypothesis* verfällt.

330 Der dritte Ausdruck *Quod est contra Definitionem*, | oder auch *per Definitionem*, wird dabey gar nicht vorkommen, weil die Definition selbst wegbleibt, und, wenn man sie auch gebrauchen wollte, nichts beweisen würde.

Erste Hypothese.

§. 40.

Es seyn demnach (Fig. XII.) AC , BD , AB , CD gerade Linien, und A , B , C , D rechte Winkel: so wird $AB = CD$, und $AC = BD$ seyn.

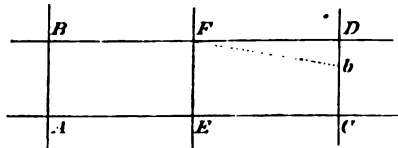


Fig. XII.

Man theile [nämlich] AC in $AE = EC$, und richte in E die Linie EF senkrecht auf: so läfst sich die Figur längs der Linie EF zusammenlegen, so dafs EA auf EC ,

EAB auf ECD fällt. Setzt man nun, es seyn AB , CD nicht gleich: so ist entweder $AB < CD$, oder $AB > CD$.

Im ersten Fall mache man $Cb = AB$, und ziehe Fb : so wird $FbC = FDC = 90$ Gr.; demnach werden in dem Triangel bFD zween rechte Winkel D, b seyn, welches ungereimt ist. (*Prop. XVII.*) Demnach kann nicht $AB < CD$ seyn.

Wäre nun ferner $AB > CD$: so würde b oberhalb D fallen, und wiederum einen Triangel von zween rechten Winkeln geben. Demnach kann auch nicht $AB > CD$ seyn. Demnach ist nothwendig $AB = CD$. Und so fällt b auf D ; und es ist zugleich auch $BFE = DFE = 90^\circ$. Demnach auch $AB = EF$.

Auf eben diese Art wird erwiesen, daß $BD = AC$ sey, wenn man durch die Mitten von AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 41.

Es seyn wiederum (Fig. XIII. und XIV.) AC, BD, AB, CD gerade Linien, und in A, B, C, D rechte Winkel. Auf AC nehme man jeden beliebigen Punkt E , und richte aus demselben EF senkrecht auf: so wird $EF = AB = CD$, und in F werden rechte Winkel seyn.

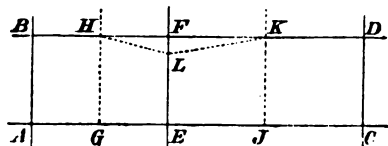


Fig. XIII.

Man halbire [nämlich] AE in G , CE in J , und richte in G und J Perpendikularen GH, JK auf. Setzt

man nun, es sey $EF > AB$: so mache man $EL = AB$; und | so 331
wird auch $EL = CD$ seyn (§. 40). Man ziehe HL, KL : und so ist $HLE = HBA = 90$ Gr. Ingleichen $KLE = KDC = 90$ Gr. welches klar erhellet, wenn man die Figur längs den Linien GH, JK zusammenlegt. Hieraus folgt aber, in Absicht auf die 13de Figur, daß HLK eine gerade Linie sey. Da nun auch HK eine gerade Linie ist: so würden zwei gerade Linien einen Raum schliessen, welches nicht angeht. Demnach kann L nicht unterhalb, und aus gleichem Grunde auch nicht oberhalb F fallen. Und so müssen nothwendig $EF = AB = CD$, und in F rechte Winkel seyn.

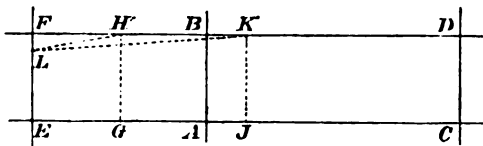


Fig. XIV.

In Ansehung der 14ten Figur folgt eben dieses, weil sich aus Einem Punkt L nicht zwei Linien LH, LK

senkrecht auf EL ziehen lassen. Demnach muß L in F fallen; und so sind in F rechte Winkel, und es ist $EF = AB = CD$.

§. 47.

Daraus wird ohne Mühe die Folge gezogen, daß die Linien LH , CG , gegen G verlängert, einander durchschneiden müssen. Denn weil die Linien FL , EK , GH , &c immer um einen gleichen Theil LM kürzer werden: so müssen die Punkte L , K , H , &c einmal unter CG kommen. Daß der Durchschnittswinkel beyder Linien LH , CG jeden Winkeln JKH , ikH , &c gleich sey, folgt ebenfalls ohne Mühe.

§. 48.

Die Sache läßt sich nun folgendermassen umkehren.

Es seyn G , F , rechte Winkel, und die Winkel JHL , HLF spitze, aber einander gleich: so wird jeder Winkel

$$Hke = JHL = HLF$$

seyn. Denn man halbire GF in E . Aus E richte man EK senkrecht auf; und durch K ziehe man JK ebenfalls senkrecht: so ist erstlich $GJK = FMK$, und $JK = MK$. (§. 30.) Da nun $JKH = MKL$, und $JHK = KLM$ ist: so sind die Triangel HJK , LMK einander gleich und ähnlich; demnach der Winkel $HJK = LMK$; demnach auch $LMK = KMF = 90$ Gr.

Da nun solchergestalt in J , M , G , F , rechte Winkel sind: so³³³ folgt schlechthin und durchaus Alles was vorhin (§. 43—47.) über die Figur gesagt worden. Jede Winkel Hke sind $= HKE$; und die Linien LH , FG , gegen G verlängert, schneiden sich unter einem Winkel, der dem Winkel JKH oder jedem Winkel ikH gleich ist.

§. 49.

Es kann ferner die Sache noch auf folgende Art umgekehrt werden.

Man setze $GE = EF$. In G , E , F , seyn rechte Winkel. Die Linie HL sey gerade; und es sey

$$FL - EK = EK - GH.$$

Man trage GH in FP , und EK in FM , und ziehe KM und KP : so werden die Winkel

$$HKE = QKL = PKE,$$

ingleichem die Winkel $EKM = FMK$, und $QKM = LMK$, und $LM = MP$ seyn.

Denn HKE , QKL sind Scheitelwinkel; demnach sind sie einander gleich. Wird ferner die Figur längs der Linie EK zusammengelegt: so fällt G auf F , GH auf FP ; demnach KH auf KP , und folglich EKH auf EKP ; und so ist

$$EKH = EKP = QKL.$$

§. 50.

Der Lehrsatz, von welchem erst die Rede war, ist folgender.

Die Linien KM, PL (Fig. XVI.) durchschneiden sich in M schief; und es sey $MP = ML$. Man ziehe KL, KP : so wird, wenn $KML > 90$ Gr. ist, $LKM < PKM$ seyn.

Aus L falle Lq auf KM senkrecht; und eben so werde aus P die Linie Pr durch KM senkrecht gezogen, und $pr = pP$ gemacht. Da nun $pMP = qML$, $PM = ML$, und in p, q rechte Winkel sind: so sind die Triangel pPM , qLM einander gleich und ähnlich. (§. 36.) Demnach ist

$$Lq = Pp = pr.$$

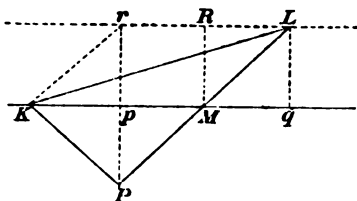


Fig. XVI

Wird also durch rL eine gerade Linie
gezogen: so läuft diese mit KM auf
keiner Seite zusammen. Denn zieht man durch M die | Linie MR 335
auf KM senkrecht, und legt die Figur längs MR zusammen: so fällt
 p auf q , pr auf qL , und Rr auf RL . Demnach sind in R rechte
Winkel. Damit ist nun $rKM > LKM$. Da aber $rKM = PKM$
ist: so ist auch $PKM > LKM$. Und dieses war zu beweisen.

§. 51.

Man sieht aus dem bisher gesagten, daß ich nicht nur die erste Hypothese und ihre Folgen für sich betrachtet, sondern auch einige andre zugleich mitgenommen habe, welche sowohl bey derselben zugleich statt haben und eine Folge davon sind, als auch dieselbe nach sich ziehen, und in beyden Absichten, das will sagen, gerade und umgekehrt damit verbunden sind.

Man kann auch leicht voraus sehen, daß eben dadurch die beyden andern Hypothesen sehr merklich eingeschränkt und näher bestimmt werden; weil dabey nothwendig alle die Möglichkeiten ausgeschlossen bleiben, wodurch man auf die erste Hypothese verfallen würde.

Uebrigens ist bey der ersten Hypothese besonders merkwürdig, daß ein einziges Rectangel alle andre von jeder Grösse und Verhältniß der Seiten nach sich zieht; und daß ebenfalls ein einziges Trapezium $GHLF$ (Fig. XV.), wo G , F rechte Winkel sind, und $IHL = HLF$ ist, sowohl die Rectangel als jede andre Trapezia und zusammenlaufende Linien zur Folge hat; und daß Alles dieses sich ebenfalls einfindet, wenn auch nur in Einem Fall

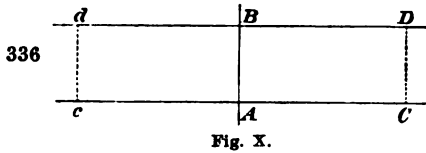
$$FL - EK = EK - GH$$

ist.

Zwote Hypothese.

§. 52.

Da es aber bey Allem, was über die erste Hypothese gesagt worden, unausgemacht bleibt, ob dieselbe möglich oder unmöglich, wahr oder falsch ist: so werde ich zu der andern Hypothese fortschreiten, und ihre Symptomata untersuchen.

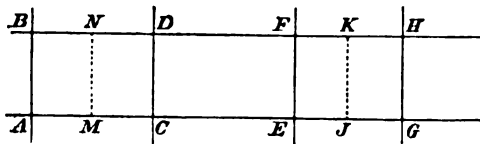


Bey dieser sind in A, B, C, c (Fig. X.) rechte Winkel; BDC aber wird stumpf gesetzt. | Da nun wegen der rechten Winkel in A und B , auf beyden Seiten der Linie AB , Alles einerley Bewandtniß hat: so

wird es, überhaupt betrachtet, genug seyn, die Symptomata für die eine Seite zu beweisen, und es, wo etwan beyde Seiten in Betrachtung gezogen werden müssen, ausdrücklich anzuzeigen.

§. 53.

Es seyn nun in A, B , (Fig. XVII.) rechte Winkel; und so auch in C, E, G , &c. Der Winkel D oder BDC sey stumpf: so ist erstlich



$DC < AB$. Denn man setze $CD = AB$. Man halbire AC und richte die Perpendikulare MN auf. Wird nun nach dieser die Figur zusammengelegt: so fällt A auf

C , AB auf CD ; demnach NB auf ND ; und so wäre $NDC = NBA$; der Voraussetzung zuwider, daß B ein rechter, D ein stumpfer Winkel sey. Wollte man $CD > AB$ setzen: so würde auf eben die Art erhellen, daß $NDC < NBA$ seyn müßte; welches noch mehr der Voraussetzung zuwider wäre. Demnach ist $CD < AB$.

§. 54.

Auf eben die Art erhellet, daß auch $BD < AC$ sey, wenn man mitten durch AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 55.

Ferner, so viel man auch auf AG senkrechte Linien EF, GH aufrichtet, oder aus BH auf AG herunterfällt, werden sie sämtlich unter sich ungleich seyn; oder man findet nicht zwo, die einander

gleich wären. Es versteht sich, daß sie auf gleicher Seite des Striches AB genommen werden. (§. 52.)

Man setze, es sey z. E. $EF = GH$. Wird demnach mitten auf EG die senkrechte Linie JK aufgerichtet, und die Figur längs derselben zusammengelegt: so wird KF auf KH fallen. Demnach werden in K rechte Winkel seyn. Damit ist aber auch D ein rechter Winkel. (§. 41.) Da nun dadurch die Voraussetzung umgestossen wird: so kann auch nicht $EF = GH$ seyn.

§. 56.

337

Es sind aber nicht nur die Senkstriche CD , EF , GH durchaus ungleich, (§. 55.) sondern jeder von AB entferntere ist kleiner als jeder nähere.

Man setze erstlich, es sey $EF > CD$. Da nun auch $AB > CD$ ist: so giebt es zwischen AC und zwischen CE nothwendig solche Perpendikulare, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BF sich sprungsweise von AE entfernen müßte, um in F wiederum entfernter zu seyn, als sie in D war. Nun aber ist ein solches Entfernen der Natur der geraden Linie, die Gleichheit der Perpendikulare aber dem vorhergehenden §. 55 zuwider. Demnach kann auch nicht $EF > DC$ seyn. Da nun auch $EF = DC$ nicht angeht (§. 55.): so muss $EF < DC$ seyn.

Ist aber $EF < DC$: so wird auf eben die Art erwiesen, daß auch $HG < EF$ sey. Denn man setze, es sey $HG > EF$: so giebt es zwischen EG und zwischen AE nothwendig solche Senkstriche, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BH sich sprungsweise von AG entfernen müßte. Nun können aber auch nicht zween Senkstriche einander gleich seyn. Demnach geht es nicht an, daß $GH > EF$ sey. Da nun auch nicht $GH = EF$ seyn kann (§. 55.): so ist nothwendig $GH < EF$.

§. 57.

Ich habe diesen Beweis auf das Gesetz der Continuität gegründet, weil er sich auf diese Art am kürzesten vortragen läßt. Ich glaube auch nicht, daß er dadurch minder evident und schlüssig sey, als wenn er auf die Euklidischen Grundsätze wäre gebaut worden. Indessen läßt er sich allerdings auch darauf gründen.

Es seyn in A, B, E, G , (Fig. XVIII.) rechte Winkel. Die Linie BH [sey] gerade; (welches sich zwar für sich verstehet, aber der Umstände wegen erinnert werden muß) AB sey grösser als EF und GH ; hingegen GH grösser als EF . Man halbire AG in N , und EG in M . Aus N, M richte man Perpendikulare Nn, Mm auf. Ferner

§. 59.

Man kann dieses Letztere auch auf folgende Art beweisen. Auf HD (Fig. XIX) nehme man die Distanzen HG , GF , FE , EA , AB ,

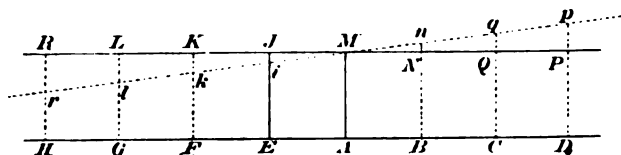


Fig. XIX.

BC , CD , &c gleich und so klein man will. Aus allen diesen Punkten richte man Perpendikulare auf, und ziehe RP durch EJ rechtwinklicht: so werden, unsrer zwoten Hypothese zufolge, die Winkel JMA , JNB , JQC , JPD , &c ingleichem auf der andern Seite die Winkel JKF , JLG , JRH , &c sämtlich stumpf, und die auf beyden Seiten von EJ gleich entfernten gleich seyn. (§. 30.) Man ziehe nun durch M die Linie rp auf AM senkrecht: so ist ebenfalls $EiM = MnB$, $FkM = MqC$, $GlM = MpD$, &c. Da nun MJE ein rechter Winkel ist: So ist MiE , und damit auch MnB und MNB noch mehr stumpf. Nun ist $MNB = MLG$; daher $MLG = MpD$ noch mehr stumpf als MnB . Und eben so MPD noch mehr stumpf als MpD ; folglich noch viel mehr als MnB , &c. Ferner, da $MKF > 90$ Gr. ist: so ist auch $MkF = MqC$ noch stumpfer. Und da $MQC > MqC$: so ist auch MQC noch viel mehr stumpf, und damit auch $MRH = MQC$, und um so mehr noch MrH , &c.

Man sieht leicht, daß auf eben die Art immer fortgeschlossen werden kann, und demnach die Winkel M , N , Q , P , &c desto mehr stumpf sind, je mehr sie | von J entfernt sind. Daß eben dieses von 340 jeden zwischen M , N , Q , P , &c fallenden Winkeln gelte, folgt daraus, daß AB , BC , CD , &c so klein angenommen werden können, als man will.

§. 60.

Es ist ferner merkwürdig, daß diese in Einem fortgehende Vergrößerung der stumpfen Winkel M , N , Q , P , &c nicht nur von der absoluten Länge der Linien EA , EB , EC , ED , &c sondern auch von der absoluten Länge der Perpendikulare EJ , AM , BN , &c abhängt.

Um dieses noch zu zeigen: so seyn in A , B , C , D , E (Fig. XX.) rechte Winkel, und $AB = BC = AD = DE$. Demnach sind, ver-

„über oder unter H seyn.) Demnach sind (eben so wie §. 57.) $Pp = Rr = Qq$; „welches die Hypothese umstößt. zc.“

„Auf eine ähnliche Art wird §. 69. verfahren.“ [Es scheint, daß *Lambert* auch hier versucht hat, den Beweis unabhängig von dem Gesetze der Continuität zu führen. So wie der Zusatz lautet, ist er uns freilich unverständlich geblieben.]

kein solcher Durchschnitt statt haben kann: so folgt für sich, daß unsre zwote Hypothese dadurch werde *ad absurdum* gebracht seyn. Die Art, wie dieses geschehen kann, ist nun folgende.

§. 63.

Es seyn in A, B , (Fig. XXI.) rechte Winkel. Auf AG nehme man nach Belieben drey Punkte E, F, G , so daß $EF = FG$ sey, und richte aus denselben die Linien EH, FJ, GK senkrecht auf: so ist zu beweisen, daß allemal $EH - FJ < FJ - GK$ oder

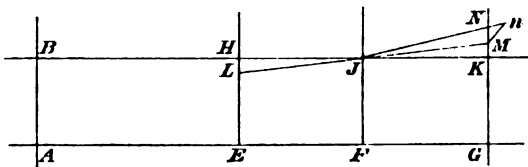


Fig. XXI.

$FJ - GK > EH - FJ$

sey, wenn die bisher betrachtete zwote Hypothese wahr ist.

Nun sind, dieser Hypothese zufolge, die Winkel BHE, BJF, BKG nicht nur stumpf; sondern es ist $BKG > BJF$, und $BJF > BHE$. Zieht man demnach durch J die Linie LM senkrecht auf JF : so geht sie unter H und über K durch; und es ist $EL = GM$. (§. 30.) Man mache nun $GN = EH$, und ziehe JN : so wird, wenn man die Figur längs der Linie FJ zusammenlegt, FE auf FG , EL auf GM , EH auf GN , demnach JL auf JM und JH auf JN fallen; und die Winkel HJL, MJK, NJM werden gleich seyn. Da nun $BHE < BKG$: 342 so ist $EHJ > JKN$. Es ist aber $EHJ = JNK$. Demnach ist $JNK > JKN$. Damit aber ist auch $JK > JN$.

Man mache $Jn = JK$, und ziehe Mn : so ist der Winkel $JMK = JMn$. Demnach ist JMK stumpf. Demnach, ebenfalls vermöge der zwoten Hypothese, $GM = EL$ kleiner als FJ . Ferner, da $JNG = JHE$ ein spitzer Winkel ist: so ist nNM stumpf; und damit ist $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$. Demnach ist auch $MK > MN$; und eben so, weil $MN = LH$ ist: so ist auch $MK > LH$. Demnach

$$GM - GK > EH - EL.$$

Nun aber ist

$$GM = EL.$$

Demnach

$$GM - GK > EH - GM.$$

Es ist aber, vermöge des erst erwiesenen,

$$FJ > GM.$$

Folglich

$$2 FJ > 2 GM.$$

Demnach, wenn man addirt,

$$GM + 2 FJ - GK > 2 GM + EH - GM.$$

Und folglich

$$2 FJ - GK > EH;$$

Oder

$$FJ - GK > EH - FJ.$$

Und dieses war zu beweisen.

§. 64.

Die Perpendikel EH , JF , KG , &c nehmen demnach nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer stärker ab. So klein demnach auch die Abnahme seyn mag: so muß, wenn man fortfährt in gleichen Entfernungen EF , FG , Perpendikulare aufzurichten, die Summe der Abnahmen nothwendig einmal anfangen grösser als AB zu werden. Und da dieses nicht geschehen kann, es sey denn, daß die Linie BK , bis dahin verlängert, sich unter die ebenfalls verlängerte AG herabsenke: so wird dadurch offenbar der Satz, daß BK , AG wegen der rechten Winkel in A , B nicht zusammenlaufen, umgestossen. Da sich aber dieser Satz nicht umstossen läßt: so fällt die zwote Hypothese 343 ins Unmögliche. Sie wird aber | noch viel unmittelbarer dadurch ungereimt, daß die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AB sich unter die Linie GA herabsenken, und demnach die zwo Linien BK , AG einen Raum schliessen müßten. —

Laßt uns nun noch sehen, was aus der dritten Hypothese werden wird.

Dritte Hypothese.

§. 65.

Man kann nun nach der Betrachtung der beyden ersten Hypothesen voraus vermuthen, daß bey der dritten immer spitzere Winkel und immer grösser werdende Perpendikulare zum Vorschein kommen werden. Hingegen läßt es sich eben daher auch nicht voraussehen, wie diese Hypothese in Absicht auf die Möglichkeit werde geprüft werden können. Ich werde demnach die Sache beschreiben, wie ich sie gefunden habe.

§. 66.

Es seyn wiederum in A , B , C , (Fig. XVII.) und so auch in jeden Punkten E , J , G , &c rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel D oder BDC spitze. (§. 39.) Die erste Folge, die wir daraus ziehen, ist, daß $DC > AB$ ist. Denn wäre $CD = AB$: so

würde eben so wie §. 53. folgen, daß BDC ein rechter Winkel wäre. Und dieses würde der Voraussetzung zuwider seyn. Wollte man aber $CD < AB$ annehmen: so würde, wenn man die Figur längs der mittlern Perpendikulare MN zusammenlegt, A auf C , B aber über D hinauf fallen; und damit würde $NDC > 90$ Gr. seyn; welches der Voraussetzung noch mehr zuwider wäre. Demnach ist $CD > AB$.

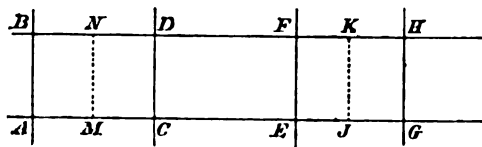


Fig. XVII.

§. 67.

Auf gleiche Art ist auch $BD > AC$.

§. 68.

Ferner sind jede andre Perpendikularen EF , GH , nicht nur grösser als AB ; sondern es ist keine der andern gleich, und jede entferntere GH ist grösser als jede nähere EF .

Man setze erstlich, es sey $GH = EF$. Mitten | auf EG errichte 344 man JK senkrecht: so sind in K rechte Winkel; und damit sind auch in D rechte Winkel. (§. 41.) Nun ist aber, vermöge der Hypothese D ein spitzer Winkel. Demnach läßt sich nicht $GH = EF$ setzen.

Man kann aber ferner auch nicht $EF < DC$ setzen. Denn da $CD > AB$ ist: so würden nothwendig zwischen AC und zwischen CE Perpendikularen vorkommen, die einander gleich wären. Da nun dieses dem erst erwiesenen zuwider ist, und aus gleichem Grunde auch nicht $EF = CD$ seyn kann: so ist $EF > CD$. Auf gleiche Art folgt auch daß $GH > EF$ seyn müsse. Und so ist auch jede zwischen A , C fallende Perpendikulare grösser als AB , und kleiner als CD . &c.

Ich habe hierbey ebenfalls wiederum wie oben (§. 56.) das Gesetz der Continuität gebraucht. Will man aber lieber den Beweis auf die Euklidischen Grundsätze bauen: so kann dieses auf eine der im §. 57. angegebenen durchaus ähnliche Art geschehen. Denn man wird finden, daß für gegenwärtigen Fall, in der 18den

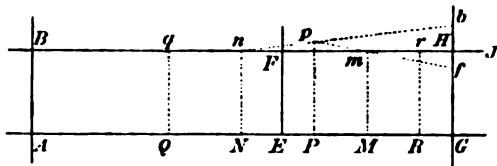


Fig. XVIII.

Figur, b unterhalb, f aber oberhalb H , und damit auch p unter Fm kömmt, und dadurch an dem Satze $Qq = Rr$ nichts geändert wird.

§. 69.

In Ansehung der Winkel D, F, H , &c (Fig. XVII.): so sind hier nicht nur alle spitze, sondern auch alle ungleich; und jeder entferntere H ist spitzer als jeder nähere F .

Dafs alle spitze sind, folgt daraus, dafs alle Perpendikulare grösser als AB sind, ohne Mühe, wenn man, z. E. in Absicht auf den Winkel F die Figur so zusammenlegt, dafs E auf A falle. Denn so wird F oberhalb B fallen; und da in B rechte Winkel sind: so mufs $BFE < 90$ Gr. seyn.

Dafs ferner nicht zween Winkel F, H gleich spitze sind, folgt aus dem §. 48, weil die Linien HF, GE , gegen A verlängert, sich durchschneiden, und in B schiefe Winkel seyn würden. Da nun dieses der Voraussetzung zuwider: so kann auch nicht $F = H$ seyn.

346 Endlich kann auch nicht $H > F$ seyn. Denn wo dieses wäre: so würden zwischen BF und zwischen FH Winkel vorkommen, die einander gleich wären; und damit würde auch $F = H$ seyn. (§. 48.) Demnach mufs $H < F$ seyn.

Man kann, um dieses ohne Zuziehung des Gesetzes der Continuität zu beweisen, eben so wie §. 59 verfahren, wenn man in der 19den

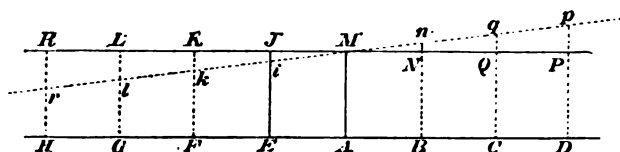


Fig. XIX.

Figur in i rechte Winkel, und $iMA < 90$ Gr., JMA aber $= 90$ Gr. setzt. Denn so wird $EJM = MNB$ spitze, und damit $MnB = MlG$ noch kleiner, und eben dadurch $MLG = MPD$ noch mehr kleiner. &c.

§. 70.

Aus dem aber, dafs die entfernten Winkel immer spitzer werden, folgt nun ferner, dafs die Perpendikulare mit der Entfernung von A (Fig. XVII.) nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer mehr grösser werden, so dafs sich BH , verlängert, von AG , ebenfalls verlängert, dergestalt entfernt, dafs die Perpendikulare grösser werden, als jede gegebene Grösse.

Es seyn in A, B (Fig. XXII.) rechte Winkel. Man nehme nach Belieben die Punkte E, F, G , so dafs $EF = FG$ sey, und richte aus denselben die Perpendikulare EH, FJ, GK auf: so sind, vermöge unsrer dritten Hypothese BHE, BJJ, BKG spitze Winkel, und

jeder folgende spitzer als der vorhergehende. Zieht man demnach durch J die Linie LM auf FJ senkrecht: so geht LM oberhalb H und unterhalb K durch, weil $HJF < 90$ Gr. ist.

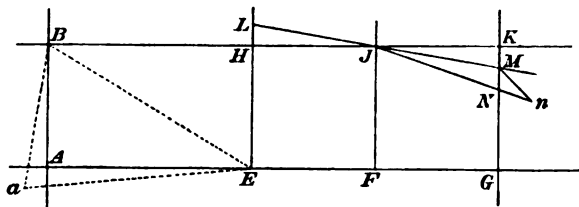


Fig. XXII.

Man mache $GN = EH$, und ziehe JNn . Da nun $EL = GM$ ist (§. 30.): so fällt N unterhalb M . Und indem man die Figur längs der Linie FJ zusammenlegt, wird JH auf JN , JL aber auf JM fallen; und die Winkel LJH , KJM , MJN werden gleich seyn. Denn LJH fällt beym Zusammenlegen auf MJN ; und LJH , KJM sind Scheitelwinkel. Da nun ferner JHE auf JNG fällt: so ist $JNG = JHE$; demnach auch $JNK = BHE$. Nun aber ist $BHE > JKN$; | dem- 346 nach ist ebenfalls $JNK > JKN$. Daraus folgt aber $JK > JN$. Man mache also $Jn = JK$, und ziehe Mn : so ist $Mn = MK$, und der Winkel $JMK = JMn$ stumpf; demnach JMG spitze. Dadurch ist aber, ebenfalls vermöge der dritten Hypothese, $GM > FJ$, und damit auch $EL > FJ$, weil $EL = GM$ ist. Da nun ferner $JNM = BHE$ spitze ist: so ist MNn stumpf, und damit $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$, $MN = LH$; demnach $KM > LH$; und damit

$$GK - GM > EL - EH.$$

Nun aber ist

$$GM = EL.$$

Demnach

$$GK - GM > GM - EH.$$

Da nun, vermöge des erst erwiesenen,

$$GM > FJ,$$

und

$$2 GM > 2 FJ:$$

so ist, wenn man addirt,

$$GK + 2 GM - GM > GM + 2 FJ - EH.$$

Folglich

$$GK > 2 FJ - EH;$$

oder

$$GK - FJ > FJ - EH.$$

Demnach wächst bey gleich zunehmenden Entfernungen AE , AF , AG , die Perpendikulare GK in Absicht auf FJ um ein mehrers

als FJ in Absicht auf EH . Da nun dieses von jeden folgenden Entfernungen gilt: so wird die Summe aller Zunahmen oder Incrementen endlich grösser als jede gegebene Grösse.

§. 71.

Dadurch fällt nun der Unterschied zwischen einer geraden und krummen Linie eben so weg, wie bey der zwoten Hypothese. (§. 64.) Indessen, da es sich bey der zwoten Hypothese dadurch erweisen liess, daß sich die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AB unter die Linie AG herabzog: so hat man bey der dritten, wo sich BK von AG auf beyden Seiten unendlich entfernt, nichts dergleichen zu befahren. Es macht aber eben dieses Entfernen, daß, wenn man ja
347 noch einen andern Beweis | der Unmöglichkeit der dritten Hypothese verlangt, derselbe auf eine andre Art gefunden werden muß.

Ich merke inzwischen an, daß mittelst der §. 64 und 70. eine Menge von Einwendungen wegfällt, die man sonst wider die Parallellinien und deren von verschiedenen Geometern versuchte Beweise gemacht hat. Denn die ganze Sache kömmt auf die bisher betrachteten drey Hypothesen an. Nach der erstern laufen die Linien BK , AG in immer gleicher Entfernung fort. Nach der zwoten durchschneiden sie sich auf beyden Seiten von AB . Nach der dritten nimmt ihre Entfernung auf beyden Seiten immer mehr zu, und wird grösser als jede gegebene Entfernung.

Demnach fallen alle Einwendungen weg, die sich auf ein asymptotisches Annähern oder auf ein asymptotisches Entfernen gründen würden; wobey nemlich die Entfernungen EH , JF , GK , &c sich einer gewissen Grösse immer mehr näherten, ohne sie jedoch zu erreichen.

Eben so fallen auch diejenigen Einwendungen weg, wobey die zwote Hypothese zum Grunde liegen oder vorausgesetzt würde; wie z. E. wo zu drey rechten Winkeln A , B , C der vierte H stumpf, demnach die Summe > 360 Gr. oder in einem Triangel die Summe der drey Winkel > 180 Gr. angenommen würde, z weil die zwote Hypothese an sich wegfällt.

§. 72.

In Ansehung des immer mehrern Entfernens, so bey der dritten Hypothese vorkömmt, könnte man anstehen, ob die aus jeden Punkten E , F , G , &c aufgerichteten Perpendikularen die Linie BK alle noch schneiden, so groß man auch AE , AF , AG , &c annehmen würde. Nun sehe ich zwar nicht, wie bey diesem Anstande BK eine gerade

Linie bleiben könnte. Indessen wenn es auch wäre: so hat es auf die vorhergehenden Sätze keinen Einfluß. Die Vergrößerung, oder das Anwachsen der Perpendikularen, so weit diese nemlich aus jeden Punkten H, J, K , &c auf AG können gefällt werden, wird dadurch nicht nur nicht angefochten, sondern noch um desto merklicher. Und eben dieses findet auch in Ansehung der Winkel H, J, K statt, welche dadurch nicht nur bis auf einen bestimmten Grad sondern vollends bis auf 0 kleiner werden würden.

§. 73.

Bey der dritten Hypothese ist in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. Da sich jeder Triangel in zween rechtwinklichten zerfallen läßt, weil bey jedem nothwendig wenigstens zween Winkel spitze sind: so werde ich diesen Satz erstlich von den rechtwinklichten Triangeln erweisen.

Es sey ein solcher BAE . Man ziehe HB auf BA , und HE auf EA rechtwinklicht: so ist $BH > AE$, und $EH > AB$. (§. 66. 67.)

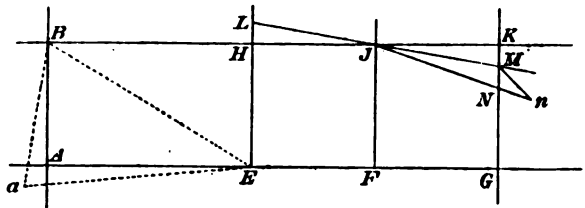


Fig. XXII.

Trägt man demnach den Triangel BHE in EaB , so daß BH in Ea , und EH in Ba falle: so fällt aB ausserhalb ABH , und aE ausserhalb AEH . Demnach ist der Winkel

$$aBE > ABE,$$

und

$$aEB > AEB.$$

Folglich, wenn man addirt,

$$aBE + aEB > ABE + AEB.$$

Es ist aber die Summe dieser vier Winkel = 180 Gr. Demnach ist

$$aBE + aEB > 90 \text{ Gr.}$$

und

$$ABE + AEB < 90 \text{ Gr.}$$

Folglich

$$ABE + AEB + BAE < 180 \text{ Gr.}$$

Die Besorgnifs, als möchten BH, EH einander nicht schneiden, hat hier ebenfalls nichts zu sagen; weil, wenn es auch wäre, die

Linien Ba , Ea nur um so mehr noch ausserhalb BAE fallen würden.

§. 74.

Nun seyn in jedem Triangel AGC (Fig. XX.) die Winkel A , C spitze. Aus G falle GB auf AC senkrecht: so ist

$$AGB + GAB + ABG < 180 \text{ Gr.}$$

$$CGB + GCB + CBG < 180 \text{ Gr.}$$

Demnach die Summe

$$AGC + GAC + GCA + ABG + CBG < 360 \text{ Gr.}$$

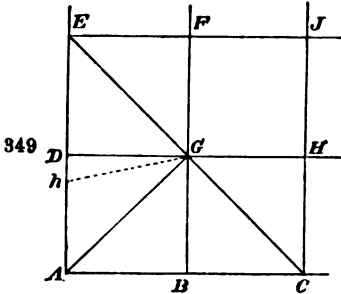
Es ist aber

$$ABG + CBG = 180 \text{ Gr.}$$

Demnach

$$AGC + GAC + GCA < 180 \text{ Gr.}$$

Fig. XX.



§. 75.

Da in einem gleichseitigen Triangel ABC (Fig. XXIII.) die Winkel A , B , C gleich sind: so ist, bey der dritten Hypothese, jeder derselben kleiner als 60 Gr.

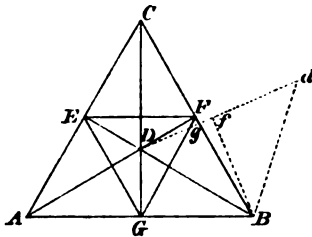


Fig. XXIII.

§. 76.

Man ziehe nun in einem gleichseitigen Triangel ABC aus jedem Winkel senkrechte Linien auf die gegenüber stehende Seite: so werden sowohl die Winkel als die Seiten halbt; und die Perpendikulare haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt D . Alles dieses läßt sich durch das Zusammenlegen der Figur längs jeder Perpendikulare leicht erweisen. Und eben daraus wird auch gefolgert, daß die Winkel in D sämtlich gleich, und demnach jeder $= 60$ Gr. ist. Ferner, da der Winkel $ACG < GAC$: so ist auch $AG < GC$, oder $GC > AG$. Hingegen wegen des rechten Winkels in G , ist $AC > GC$. Demnach ist die Perpendikulare zwar kleiner als jede Seite, aber grösser als die Hälfte einer Seite.

§. 77.

Man beschreibe nun auf BD noch einen gleichseitigen Triangel Bdd . Da nun auch in diesem jeder Winkel < 60 Gr. ist; (es versteht sich bey der dritten Hypothese:) so fällt die Seite dd innerhalb

BDF , weil $BDF = 60$ Gr. ist; und so muß die aus B auf Dd fallende Perpendikulare Bf ausserhalb ABC fallen. Demnach ist $Df > Dg$. Es ist aber, wegen des rechten Winkels in F , $Dg > DF$; demnach, um desto mehr $Df > DF$. Da nun $Df = \frac{1}{2} Dd = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} DA$ ist: so ist $\frac{1}{2} DA > DF$, und $DA > 2 DF$; demnach auch $AF > 3 DF$, oder $DF < \frac{1}{3} AF$. Dieses hat bey der dritten Hypothese statt. Denn bey der ersten läßt sich leicht erweisen, daß $DF = \frac{1}{3} AF$ sey. Die zwote Hypothese, | wobey $DF > \frac{1}{3} AF$ seyn 350 würde, fällt an sich weg. Und demnach kann DF wenigstens nicht grösser als $\frac{1}{3} AF$ seyn.

§. 78.

Ferner ist, bey der dritten Hypothese, in jedem Triangel KLM (Fig. XVI.) die Summe zweener Winkel $LKM + KLM$ kleiner als der aussen an dem dritten liegende Winkel LMq . Denn es ist

$$LMK + LKM + KLM < 180 \text{ Gr.}$$

Hingegen

$$180 \text{ Gr.} = LMK + LMq.$$

Demnach

$$LKM + KLM < LMq.$$

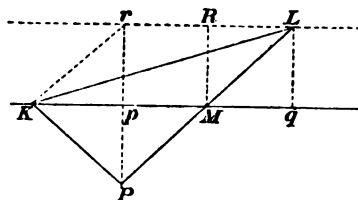


Fig. XVI.

Und wenn $KM = ML$ ist: so ist LKM kleiner als die Hälfte von LMq .

§. 79.

Man sieht leicht, daß sich auf diese Art bey der dritten Hypothese noch weiter gehen läßt; und daß sich ähnliche Sätze auch bey der zwoten finden lassen, doch mit ganz entgegengesetztem Erfolge. Ich habe aber vornehmlich bey der dritten Hypothese solche Folgsätze aufgesucht, um zu sehen, ob sich nicht Widersprüche äußern würden. Aus Allem sah ich, daß sich diese Hypothese gar nicht leicht umstossen läßt. Ich werde demnach noch einige solcher Folgsätze anführen, ohne darauf zu sehen, wiefern sie auch bey der zwoten Hypothese mit gehöriger Veränderung gezogen werden können.

Die erheblichste von solchen Folgen ist, daß, wenn die dritte Hypothese statt hätte, wir ein absolutes Maass der Länge jeder Linien, des Inhalts jeder Flächenräume und jeder körperlichen Räume haben würden. Dieses stößt nun einen Satz um, den man ohne Bedenken

unter die Grundsätze der Geometrie rechnen kann, und woran bisher noch kein Mensch gezweifelt hat, daß es nemlich *kein solches absolutes Maafs gebe*. Es machte zwar *Wolf* einen Lehrsatz daraus, indem er die Definition der Grösse (*Quantitas*) so einrichtete, daß er im Folgenden daraus herleiten konnte: *Quantitas dari sed non per se*
 351 *intelligi potest*. | Allein dieser Lehrsatz muß, so wie die Definition, geändert werden, weil es unstreitig *Größen* giebt, die für sich kenntlich sind, und eine bestimmte Einheit haben. Bey Linien, Flächen und körperlichen Räumen gilt derselbe allerdings; und da glaube ich nicht, daß man, um ihn in der Geometrie anzubringen, erst eine Definition dazu zurechte machen mußte.

§. 80.

Um aber die erst erwähnte Folge zu beweisen; so seyn in *A, B, C, D, E* (Fig. XX.) rechte Winkel; und es werden, bey der dritten

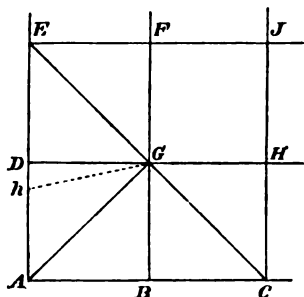


Fig. XX.

Hypothese, *G, F, H, J* spitze, und zwar $H < G$, und $J < H$; und eben so $F < G$ und $J < F$ seyn. Nun sage ich, der Winkel *G* sey das Maafs des Viereckes *ADGB*, wenn nemlich $AB = AD$ ist; und eben so sey der Winkel *J* das Maafs des Viereckes *ACJE*, wenn $AC = AE$ ist.

Denn, mit Beybehaltung der Gleichheit der Seiten $AB = AD$ und der rechten Winkel *A, B, D*, wird der spitze Winkel *G* bey keinem andern Vierecke passen, als bey solchen, deren Seiten *AB, AD* die absolute Länge von *AB, AD* haben. Man nehme z. E. grössere Seiten $AE = AC$, und mache in *E, C* rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel $J < G$. Demnach paßt *G* nicht auf *J*. Wäre $AE = AC$ kleiner als $AD = AB$ genommen worden: so würde $J > G$ herausgekommen seyn; und so würde *G* ebenfalls nicht auf *J* gepafst haben.

Demnach ist der Winkel *G* das absolute Maafs des Viereckes *ADGB*. Da die Winkel ein für sich kenntliches Maafs haben: so dürfte man z. E. wenn $AB = AD$ ein Pariser Fufs, und dabey der Winkel $G = 80$ Gr. wäre, nur sagen, man soll das Viereck *ADGB* so groß machen, bis der Winkel $G = 80$ Gr. würde: so werde man die absolute Länge eines Pariser Fusses auf $AB = AD$ haben.

Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch
 352 abdringt, die dritte Hypothese möchte doch wahr | seyn!

Allein ich wünschte es, dieses Vorthails unerachtet, dennoch

nicht, weil unzählige andre Unbequemlichkeiten dabey mit seyn würden. Die trigonometrischen Tafeln würden unendlich weitläufig; und die Aehnlichkeit und Proportionalität der Figuren würde ganz wegfallen; keine Figur liefse sich anders als in ihrer absoluten Gröſſe vorstellen; um die Astronomie wäre es übel bestellt; u. s. w.

§. 81.

Jedoch dies sind *Argumenta ab amore & invidia ducta*, die aus der Geometrie, so wie aus allen Wissenschaften, ganz wegbleiben müssen.

Ich wende mich demnach wiederum zu der dritten Hypothese. Bey dieser ist nicht nur, wie wir vorhin gesehen haben, in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. oder zween rechte Winkel; sondern der Unterschied von 180 Gr. wächst schlechthin nach dem Flächenraume des Triangels; das will sagen: wenn von zween Triangeln der eine einen grössern Flächenraum hat, als der andre: so ist in dem erstern die Summe der drey Winkel kleiner als sie in dem andern ist.

Ich werde diesen Satz hier nicht so ausführlich beweisen, als ich ihn vortrage, sondern von dem Beweise nur so viel anführen, daß sich das Uebrige daraus überhaupt begreifen läßt.

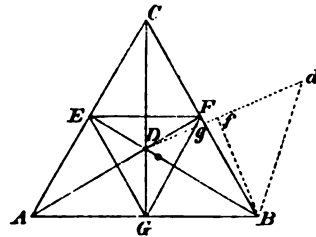


Fig. XXIII.

Es sey z. E. in dem Triangel ACB (Fig. XXIII.) der Triangel EFG , so daß des Letztern Ecken auf die Seiten des erstern stossen. Da auf diese Art EFG ganz in ABC ist: so ist der Raum des erstern unstreitig kleiner als der Raum des Letztern. Nun ist die Summe der Winkel:

$$EFG + EGF + GEF = 180 \text{ Gr.} - a.$$

$$EGA + EAG + AEG = 180 \text{ Gr.} - b.$$

$$FGB + GBF + GFB = 180 \text{ Gr.} - c.$$

$$FCE + FEC + EFC = 180 \text{ Gr.} - d.$$

Hingegen

$$EGA + EGF + FGB = 180 \text{ Gr.}$$

$$AEG + GEF + FEC = 180 \text{ Gr.}$$

$$EFC + EFG + GFB = 180 \text{ Gr.}$$

Zieheth man die Summe dieser drey letztern Gleichungen von der Summe der vier erstern ab: so bleibt

$$CAB + ABC + BCA = 180 \text{ Gr.} - a - b - c - d.$$

Da demnach hier nicht nur a , sondern $a + b + c + d$ von 180 Gr. abgezogen werden muß: so sieht man, daß sich bey dem Triangel ABC alle Defecte a, b, c, d der vier Triangel AEG, ECF, FBG, GEF zusammenhäufen, und demnach die Summe seiner drey Winkel um so viel mehr kleiner als 180 Gr. ist.

Kann das kleinere Dreyeck nicht ganz in das grössere gelegt werden: so steht etwas davon voraus, und dieses wird abgeschnitten und in das hervorstehende des grössern Dreyeckes gelegt, und allenfalls so fortgefahren, bis das nunmehr in Theile zerschnittene kleinere Dreyeck ganz im grössern liegt. Der im grössern unbedeckt bleibende Raum wird in Triangel zerfällt. So viel nun die Summe aller Winkel in diesen Triangeln kleiner ist als eben so vielmal 180 Gr. um eben so viel ist die Summe der drey Winkel des grössern vorgegebenen Dreyeckes kleiner als die Summe der drey Winkel des vorgegebenen kleinern Dreyeckes.

§. 82.

Wenn es bey der dritten Hypothese möglich wäre, mit gleichen und ähnlichen Triangeln einen grössern Triangel zu bedecken: so würde es sich auch leichte darthun lassen, daß bey jedem Triangel der Ueberschuß von 180 Gr. über die Summe seiner drey Winkel dem Flächenraume des Triangels proportional wäre. Indessen da sich dieser Ueberschuß nach dem Raume richtet: so läßt sich dennoch eine solche Proportionalität auf eine andre Art gedenken.

Man setze z. E. zween Triangel. Der eine habe doppelt so viel 354 Flächenraum als der andre: | so wird ersterer, so viel man will, zerschnitten, doppelt auf den andern gelegt werden können. Und wenn der kleinere um a Gr. in Absicht auf die Summe seiner Winkel von 180 Gr. abgeht: so wird der grössere um $2a$ Gr. davon abgehen. —

Ich werde nun noch folgende Anmerkung beyfügen. Bey der zwoten Hypothese kommen ganz ähnliche Sätze vor, nur daß dabey in jedem Triangel die Summe der drey Winkel grösser als 180 Gr. wird. Der Ueberschuß proportionirt sich ebenfalls nach dem Flächenraume des Triangels.

Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel *sphärische* nimmt, weil bey diesen sowohl die Summe der Winkel grösser als 180 Gr. als auch der Ueberschuß dem Flächenraume des Triangels proportional ist.

Noch merkwürdiger scheint es, daß, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit

der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als daß jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile.

Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer Etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstossen läßt, als es sich bey der zwoten thun liefs.

§. 83.

Was ich erst von den Triangeln sagte, gilt auch von den viereckichten Figuren. Weil jede sich in zween Triangel zerfällen läßt: so beträgt, bey der dritten Hypothese, die Summe der vier Winkel eines Viereckes weniger als 360 Gr. und der Unterschied ist dem Flächenraume des Viereckes proportional.

Es seyn nun (Fig. XIX.) in H, r, G, F, E, A , &c rechte Winkel, und $HG = GF = FE = EA = \&c$, so sind bey der dritten Hypothese die Perpendikularen $Hr, Gl, Fk, Ei, | AM, Bn, \&c$ nicht nur 355

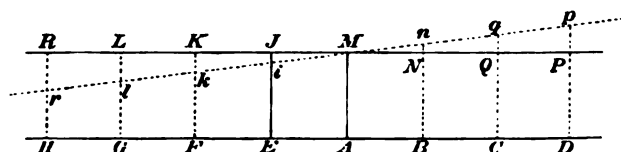


Fig. XIX.

der Ordnung nach grösser, sondern sie nehmen immer um mehr zu. Dieses macht, daß auch der Flächenraum, die Vierecke $Hr l G, Gl k F, Fk i E$, &c immer grösser, und eben so wie die Perpendikularen immer um mehr grösser werden. Demnach ist die Summe der 4 Winkel nicht nur immer kleiner, sondern immer um mehr kleiner als 360 Gr. Da nun die Linien rp, HD gerade sind: so lassen sich die sämtlichen Vierecke, oder so viel deren hintereinander liegend genommen werden, in Eines zusammennehmen; und da die an einander stossenden Winkel in l, k, i , &c G, F, E , &c immer zusammen = 180 Gr. sind: so werden bey jedem neu addirten Vierecke von der Summe der Winkel 360 Grade weggeworfen. Und so ist z. E. die Summe der Winkel

$$H, r, l, G = 360 \text{ Gr.} - \alpha.$$

$$H, r, k, F = 360 \text{ Gr.} - 2\alpha - \beta.$$

$$H, r, i, E = 360 \text{ Gr.} - 3\alpha - 2\beta - \gamma.$$

$$H, r, M, A = 360 \text{ Gr.} - 4\alpha - 3\beta - 2\gamma - \delta.$$

&c

&c

&c

Kann man nun damit immer fortfahren: so wird nothwendig folgen, dafs man zuletzt auf Vierecke verfällt, in welchen die Summe der vier Winkel kleiner als drey rechte Winkel sind. Es sey $HrpD$ ein solches Viereck. Da nun bereits in H, r, D drey rechte Winkel sind: so ist

$$H + r + D + p > 270 \text{ Gr.}$$

Und dieses stöfst die Folge, und mit derselben entweder die ganze dritte Hypothese, oder den Satz um, dafs die aus G, F, E, A, B , &c errichtete Perpendikulare irgend aufhören, die Linie rp zu schneiden*). Allein, wenn auch dieses wäre: so würden die Ordinaten dennoch bis ins Unendliche wachsen, und demnach der Raum des letzten Viereckes so vielmal den Raum des ersten $HrLG$ fassen, dafs die Summe der Winkel kleiner als 270 Gr. wäre.

Indessen werde ich darauf nicht bestehen, weil man allerdings
356 vorerst die | Vermuthung heben müfste, es möchten die Vierecke gerade aufhören möglich zu seyn, wo die Summe der vier Winkel = 270 Gr. würde. Es kömmt demnach vielmehr darauf an, ob die aus den Punkten G, F, E, A, B , &c errichteten Perpendikulare die Linie rp sämtlich schneiden?

Wollte man diese Frage auf die blofse *Vorstellung* der Sache ankommen lassen: so sage ich nochmals, dafs dabey der Begriff einer geraden Linie ganz wegfällt. Und ich würde, statt des 11ten Euklidischen Grundsatzes, allemal lieber als für sich evident annehmen, *dafs eine Linie, die die Perpendikulare Hr rechtwinklicht schneidet, und sich sodann z. E. längs der Perpendikulare Dp, ohne diese zu schneiden, aufwärts zieht, keine gerade Linie sein könne.*

§. 84.

Da es aber die Frage ist, ob sich, ohne Zuziehung neuer Grundsätze, die dritte Hypothese mittelst der übrigen Euklidischen Grundsätze umstossen lasse: so bleiben bey der gegenwärtigen Betrachtung noch zween Wege zu versuchen.

Der erste, wenn sichs aus der dritten Hypothese selbst folgern liesse, dafs die Perpendikulare Gl, Fk, Ei , &c sämtlich die Linie rp schneiden müssen. Könnte dieses geschehen: so würde, vermöge des vorhin erwiesenen, die Hypothese sich selbst umstossen. Ich habe

*) [Wir sind geneigt zu glauben, dafs *Lambert* nicht „irgend“ sondern „nirgend“ geschrieben hat; wenigstens giebt der jetzige Wortlaut keinen Sinn. Das Folgende bezieht sich ja offenbar auf den Fall, dafs die Perpendikulare aufhören, rp zu schneiden; man vergleiche dazu §. 72.]

Hälfte, oder auch nur grösser als $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κ von AG sey: so wird der Durchschnitt J ebenfalls erwiesen seyn, weil AJ kleiner als das 2, 3, 4, κ fache von AE seyn wird. Dafs es Fälle giebt, wo $AD > \frac{1}{2} AG$ ist, wird leicht erwiesen.

§. 87.

In dem Cirkel AC (Fig. XXIV.) seyn AE , EB , BF , FC , &c Octanten. Man ziehe die Vierecke $ABCD$, $EFHG$: so werden die Durchschnittspunkte J , K , L ebenfalls in einem concentrischen Cirkel herumliegen, | und die Winkel JMK , KML , &c Octanten seyn. Man ziehe nun JL : so wird leicht bewiesen, dafs $MP > PK$, demnach $MP > \frac{1}{2} MK$ oder $MP > \frac{1}{2} MJ$ ist. Denn $ERK = 90$ Gr. Demnach $EKR < 90$ Gr. Folglich $JKL > 90$ Gr.; $JKM > 45$ Gr. Da nun JMK 45 Gr. ist: so ist $PM > PK$.

358

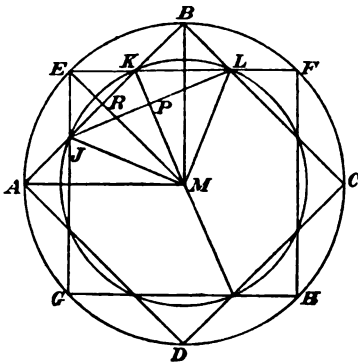


Fig. XXIV.

Auf diese Art läßt sich von jedem Cirkel auf einen kleinern schliessen.

Man müßte nur auch beweisen können, dafs, wenn man jenen, so viel man will, vergrößert, dieser nicht zurücke bleibe. Und dieses wird man erhalten, sobald man erweisen kann, dafs entweder $ER = RK$, oder auch nur $ER < JK$, oder $ER < RM$, oder, ohne Rücksicht auf den äussern Cirkel, der Winkel JKL stumpf ist.

§. 88.

Man sieht aus Allem diesem, dafs, so leicht die zwote Hypothese umzustossen war, es noch ganz im Gegentheil mit der dritten viel härter halte.

Ich übergehe noch mehrere solcher Versuche; und werde nun

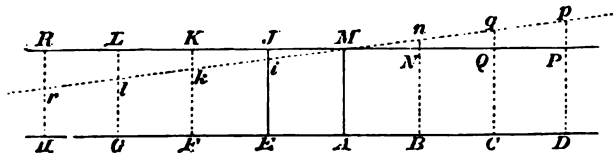


Fig. XIX.

(Fig. XIX.) $AB = BC = CD = \&c$ und in A , B , C , D &c rechte Winkel, und $AM = BN = CQ = DP = \&c$ setzen. Dabey sind nun

die Winkel $AMN = MNB = BNQ = NQC = CQP = QPD = \&c$,
 zufolge der dritten Hypothese, sämtlich spitze, und $MN = NQ = QP = \&c$.
 Das will nun sagen: $MNQP$ ist nicht eine gerade Linie, sondern ein
 Theil eines regulären Vieleckes, das sich in einen Cirkel beschreiben
 läßt, dessen Mittelpunkt unterhalb M auf jeder der Linien MA , NB ,
 QC , PD , &c ist. (§. 20.) Da nun damit B , C , D , &c nicht mehr
 rechte Winkel seyn können: so wird dadurch die Voraussetzung und
 mit derselben die dritte Hypothese umgestossen.

Abweichungen vom Original.

- S. 167, Z. 4 v. u. (S. 144, Z. 15 v. o.). Im Urtext steht nach „Vortrag“ ein Komma.
 S. 165, Z. 8 v. u. (S. 154, Z. 2 v. o.) (Prop. XIV) statt: (Prop. XIII).
 S. 172, Z. 22, 21, 18, 17, 16, 15, 3 und 1 v. u., Seite 173, Z. 2 v. o. (S. 161, Z. 5, 5, 8, 8, 9, 10, 18, 21 und 23 v. o.) b statt β .
 S. 174, Z. 19 v. u. (S. 163, Z. 1 v. o.) aus B statt: aus b .
 S. 175, Z. 2 v. o. (S. 163, Z. 11 v. u.) DFh statt DFH .
 S. 184, Z. 6 v. u. (S. 334, Z. 16 v. o.) K statt M .
 S. 187, Z. 6 v. o. (S. 336, Z. 4 v. u.) H statt K .
 S. 188, Z. 12 v. o. (S. 338, Z. 9 v. o.) GF statt Gf .
 S. 199, Z. 8 v. o. (S. 350, Z. 1 v. o.) $AF < \frac{1}{3} DF$ statt: $DF > \frac{1}{3} AF$.
 S. 204, Z. 4, 6, 12 v. o. (S. 355, Z. 11, 10, 3 v. u.) R statt r .
 S. 205, Z. 15 v. o. (S. 357, Z. 4 v. o.) Seite statt: Seiten.
 In Figur V ist b für β gesetzt worden, um sie mit dem Texte in Übereinstimmung zu bringen; ferner ist der Buchstabe O ergänzt.
 In Figur VII des Originals ist $D\beta t$ eine gerade Linie, während nach dem Texte $K\beta t$ ein Cirkelbogen ist, der die Gerade Dt in t berührt; dem entsprechend mußte die Figur geändert werden.
 In Figur XIII ist der Punkt zwischen A und E , dem Texte entsprechend, mit G statt mit C bezeichnet.

Die in runde Klammern eingeschlossenen Seitenzahlen beziehen sich auf die Originalausgabe im Leipziger Magazin für Mathematik, Jahrgang 1786.

CARL FRIEDRICH GAUSS

1777—1855.



In der Einleitung zu Lamberts Theorie der Parallellinien hatten wir berichtet, daß etwa vom Jahre 1780 an die Frage nach dem Beweise der fünften Forderung die Aufmerksamkeit der Mathematiker immer mehr und mehr zu fesseln beginnt. Nunmehr wollen wir diese Bewegung in großen Zügen darstellen.

Während bisher nur wenige französische Forscher erwähnt werden konnten, wird es am Ende des achtzehnten Jahrhunderts ganz anders: fast alle die großen französischen Mathematiker dieser Zeit haben den Grundlagen der Geometrie ihr Interesse zugewendet.

„Die Erklärung und die Eigenschaften der geraden Linie, sowie der parallelen Geraden, sind die Klippe und sozusagen das Ärgerniß der Elementargeometrie“, hatte d'Alembert in einem bemerkenswerten Aufsätze über die Elemente der Geometrie 1759 ausgerufen und hatte hinzugefügt, man könne allerdings parallele Gerade als solche erklären, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen, dann aber sei unbedingt erforderlich, zu beweisen, daß der Abstand der beiden Geraden immer gleich dem gemeinsamen Lote sei. In ähnlicher Weise äußerte sich d'Alembert in dem Artikel *Parallèle* der *Encyclopédie*; der betreffende Band ist erst nach seinem Tode, 1789, erschienen.

Fourier schlug 1795 neue Erklärungen der Geraden und der Ebene vor, bei denen er von dem Begriffe der Bewegung ausging und mit der Kugel begann; es ist das ein Gedanke, der sich in neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie als sehr fruchtbar erwiesen hat.

Daß auch Lagrange die fünfte Forderung beweisen wollte, wissen wir aus einer Mitteilung von Lefort, die Houël in seinen *Essai critique* (1867) aufgenommen hat: „Lagrange hatte erkannt, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie von dem elften Axiome unabhängig sind, und hoffte hieraus einen Beweis dieses Axioms zu gewinnen. Alle andern Beweisversuche betrachtete er als ungenügend. So hat er sich in seinen Unterhaltungen mit Biot ausgedrückt.“

Auf diesen Beweisversuch dürfte sich wohl folgende **Erzählung** de Morgans beziehen:

„Lagrange verfaßte am Ende seines Lebens eine Abhandlung über die Parallellinien. Er begann sie in der Akademie zu lesen, aber plötzlich hielt er inne und sagte: *Il faut que j'y songe encore*; damit steckte er seine Papiere wieder ein.“

In engem Zusammenhange mit der Parallelentheorie stehen auch Untersuchungen über das Parallelogramm der Kräfte, die Daviet de Foncenex 1759 veröffentlichte; ihre Grundgedanken hatte wahrscheinlich der junge Lagrange seinem Freunde mitgeteilt.

In der Einleitung zu Wallis haben wir darauf hingewiesen, daß Laplace sich ebenfalls mit der Begründung der Euklidischen Geometrie beschäftigt hat; die betreffenden Bemerkungen in der *Exposition du système du monde* stammen aus dem Jahre 1824.

Am folgenreichsten für die Geschichte der Parallelentheorie wurden jedoch die Arbeiten von Adrien Marie Legendre (1752—1833).

In der ersten Auflage seiner *Elemente der Geometrie* vom Jahre 1794 zeigte Legendre, daß die fünfte Euklidische Forderung gleichbedeutend ist mit dem Lehrsatz, daß die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte beträgt, und gab für diesen Lehrsatz einen analytischen Beweis, dessen wir schon in der Einleitung zu Wallis gedacht haben. Dieser Beweis geht davon aus, „daß die Wahl der Längeneinheit für die Richtigkeit des zu beweisenden Lehrsatzes gleichgiltig ist“, an Stelle des Parallelenaxioms tritt also, wie bei Wallis, das Axiom von der Existenz ähnlicher Figuren.

Aber Legendre erkannte bald, daß dieser analytische Beweis für Anfänger zu schwer sei, und liefs ihn deshalb fallen. In der dritten Auflage findet man daher an dessen Stelle einen rein geometrischen Beweis des Satzes, daß die Winkelsumme des Dreiecks nicht größer sein kann als zwei Rechte; das Beweisverfahren erinnert lebhaft an das von Saccheri und Lambert für denselben Zweck angewandte. Später ersetzte Legendre diesen Beweis abermals durch einen andern. Dieser beruhte auf wiederholter Anwendung der Konstruktion, deren sich Euklid in I. 16 bedient, um zu zeigen, daß der Außenwinkel größer sein muß als jeder der gegenüberliegenden inneren Winkel. Dagegen gelang es Legendre nicht, in entsprechender Weise zu zeigen, daß die Winkelsumme nicht kleiner sein kann als zwei Rechte, und er kehrte daher in der neunten Auflage zu der Darstellung Euklids zurück.

In der zwölften Auflage von 1823 behauptete er, endlich auch diesen bisher vermifsten Beweis geben zu können. Er gebrauchte jedoch dabei

ein Axiom, das im Grunde mit dem zu beweisenden Satze gleichbedeutend ist, es soll nämlich, wenn innerhalb eines Winkelraums irgend ein Punkt gegeben ist, stets möglich sein, durch ihn Gerade zu ziehen, welche die beiden Schenkel des Winkels schneiden. Dieses Axiom war übrigens nicht neu, bereits 1791 hatte es Lorenz in seinem vortrefflichen Grundrifs der reinen Mathematik zum Beweise der fünften Forderung benutzt.

Eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen über die Parallelentheorie hat Legendre im Jahre 1833 gegeben. Hier hat er auch gezeigt, daß die Winkelsumme des Dreiecks stets zwei Rechte beträgt, sobald das bei einem einzigen Dreieck der Fall ist. Wir wissen, daß dieser Satz bereits hundert Jahre früher von Saccheri bewiesen worden ist, und bemerken noch, daß auch die Art des Beweises bei Legendre im Wesentlichen dieselbe ist wie bei Saccheri.

Wenn Legendre am Schlusse der Abhandlung von 1833 sagt, daß die Parallelentheorie durch seine Untersuchungen nach zweitausend Jahren vergeblicher Bemühungen endlich zu einem befriedigenden Abschlufs gekommen sei, so war er in einem verzeihlichen Irrtume befangen: weder die Ergebnisse seiner Untersuchungen noch die Methoden, die ihn zu diesen Ergebnissen führen, können als ein wesentlicher Fortschritt gegenüber den Leistungen von Wallis, Saccheri und Lambert bezeichnet werden. Andererseits muß hervorgehoben werden, daß die große Verbreitung, deren sich Legendres Elemente — und gewiß mit Recht — in Frankreich wie in Deutschland erfreut haben, wesentlich dazu beigetragen hat, das Interesse für die Parallelentheorie zu beleben, und daß Legendre insofern in der Geschichte der Parallelentheorie eine hervorragende Rolle spielt; rein äußerlich zeigt sich das schon darin, daß in den zahlreichen Parallelentheorien der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts immer wieder auf Legendre Bezug genommen wird, während jene älteren Versuche ganz in Vergessenheit geraten waren.

Während desselben Zeitraumes waren auch England und Italien der Schauplatz ähnlicher Bestrebungen, wie das unser Litteraturverzeichnis am Schlusse des Werkes nachweist; Genaueres können wir freilich nicht mitteilen, weil uns die betreffenden Schriften größtenteils unzugänglich geblieben sind.

Wie stand es unterdessen in Deutschland? Auch hier begegnen wir angestrenzter Bemühung, das Parallelenaxiom zu beweisen, finden wir die innige Überzeugung, das erlösende Wort gesprochen zu haben,

aber daneben sehen wir, daß Klügels Skepticismus und Kaestners Resignation Nachfolge gefunden hatten. Sehr bezeichnend für diesen Standpunkt ist eine Besprechung in dem Stück der Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 9. März 1801 (S. 407—408), die wir wortgetreu wieder abdrucken:

„Hamburg.

Demonstratio theorematis parallelarum. Ex officina Schniebesiana 1799. 30 S. in Octav.

Der uns unbekannte Verfasser schlägt den von Mehreren vor ihm betretenen Weg ein, das XI. Axiom des Euklides zu beweisen. Natürlich bedarf es auch bey ihm eines neuen Axioms, das er zu Hülfe nimmt. Es ist dieses: *Recta linea et curva nequeunt esse aequae distantes*. Diesem Axiom gehet begreiflich die Definition von *lineis aequidistantibus* voran. Bey der Definition der Parallel-Linien, die nach dem Axiome folgt, liegt der Begriff von Bewegung zu Grunde. Die Begriffe von Distanz, von Bewegung, von krummen Linien, gehören nicht in die reine Elementar-Geometrie; aber, abgesehen von diesem, so ist auch dieses Axiom kein für sich selbst einleuchtender Satz, und bedarf gar sehr eines Beweises. Die beiden Simpson, Robert und Thomas, haben sich schon dieses Axioms mit vielem Scharfsinn, aber mit wenig Glück, bedient, wenn gleich diese beiden Versuche, als Versuche, oben an stehen. Also mit diesem Axiom das XI. Axiom des Euklides begründen oder beweisen zu wollen, scheint dem Rec. ungeometrisch, so schön und strenge auch die Theoreme und Beweise der Schrift sind, die darauf gebauet werden. Daß dieses aber, ohne ein neues Axiom zu Hülfe zu nehmen, überhaupt nur möglich sey, scheint wohl mehr als zweifelhaft zu werden, wenn man alle Versuche, von dem des Ptolemäus an bis auf Franceschini's (Professors in Bologna: „*La Teoria delle parallele rigorosamente dimostrata*“, gedruckt zu Bassano), betrachtet. Das rigorosamente des letztern ist ein wahres desideratum, auch wenn man seine Theorie gelesen hat: denn in dem Beweise seines Fundamental-Theorems liegt ein offener Paralogismus, von dem es unbegreiflich ist, wie er einem in der Schule der Alten gebildeten Geometer verborgen bleiben konnte.“

Für den Verfasser dieser anonymen Besprechung halten wir K. F. Seyffer (1762—1822), der von 1789 bis 1804 außerordentlicher Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen war. Das unmittelbar vorhergehende Stück der Anzeigen vom 7. März 1801 enthält nämlich auf S. 377—387 eine sehr interessante Besprechung des *Tentamen novae parallelarum theoriae* von Schwab, die mit der vom 9. März desselben Jahres nach Stil und Inhalt die größte Ähn-

lichkeit hat. Dafs aber die Anzeige vom 7. März Seyffer zum Verfasser hat, erzählt Voit in seiner 1802 zu Göttingen erschienenen Dissertation: *Percursio conatum demonstrandi parallelarum theoriam de iisque iudicium*, die vermutlich einer Anregung Seyffers ihre Entstehung verdankt. Übereinstimmend mit Seyffer kommt Voit zu dem Ergebnis, dafs der Beweis des Parallelenaxioms noch ein frommer Wunsch sei, und läfst dahingestellt, ob die Schwierigkeiten überhaupt beseitigt werden können.

Ähnliche Ansichten über den Beweis der fünften Forderung scheint Pfaff gehabt zu haben; er meinte, wie Hessling 1818 berichtet, das einzige, was sich noch thun liefse, sei, das Parallelenaxiom durch ein einfacheres zu ersetzen, es zu „simplificieren.“

Von diesem Skepticismus zu einem thatkräftigen Handeln überzugehen, sich von der zweitausendjährigen Autorität Euklids zu emancipieren und eine Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom aufzubauen: das war auch nach den Vorarbeiten von Saccheri und Lambert immer noch ein gewaltiger Schritt. Diesen Schritt gewagt zu haben, ist das Verdienst von Carl Friedrich Gauß.

Gauß hat sich, wie er in Briefen an Bessel und Schumacher aus den Jahren 1829 und 1831 erzählt und wie durch einen Brief an seinen Jugendfreund Wolfgang Bolyai aus dem Jahre 1799 bestätigt wird, seit 1792 mit der Theorie der Parallellinien beschäftigt, er hat jedoch darauf verzichtet, seine ausgedehnten Untersuchungen über diesen Gegenstand öffentlich bekannt zu machen. Andeutungen über seine Ansichten finden sich allerdings in zwei Besprechungen, die 1816 und 1822 in den Göttinger gelehrten Anzeigen ohne Nennung des Verfassers erschienen sind. Hier spricht Gauß die Überzeugung aus, „dafs alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben“, und läfst durchblicken, dafs seine eignen Untersuchungen über das Bekannte hinausgehen.

Wie Gauß an Schumacher schreibt, hat er erst im Jahre 1831 einiges über seine Untersuchungen aufzuschreiben angefangen: „ich wünschte nicht, dafs es mit mir unterginge“, und als ihm sein Jugendfreund Wolfgang Bolyai das „Tentamen“ übersandt hatte, in dessen Appendix die nichteuklidische Geometrie von Wolfgang's Sohn, Johann Bolyai enthalten war, antwortet Gauß 1832 in einem leider noch nicht veröffentlichten Briefe*), „dafs er überrascht war,

*) So erzählt Wolfgang Bolyai in seinem Kurzen Grundriss von 1851.

gethan zu sehen, was er begonnen hatte, um es unter seinen Papieren zu hinterlassen.“

Gauß hatte nicht nur die Erfolglosigkeit aller bisherigen Bemühungen, die fünfte Forderung zu beweisen, erkannt, sondern er wußte auch, daß es notwendig so sein mußte, weil sich eine von dem Parallelenaxiom unabhängige, in sich folgerichtige Geometrie aufbauen läßt. Aber alles das hat man erst nach seinem Tode erfahren.

Zuerst veröffentlichte im Jahre 1856 Sartorius von Waltershausen, Professor der Mineralogie in Göttingen, der in persönlichem Verkehr mit Gauß gestanden hatte, Äußerungen, die Gauß über die „Antieuklidische“ Geometrie gemacht habe:

„Die Geometrie betrachtete Gauß nur als ein consequentes Gebäude, nachdem die Parallelen-theorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indeß zur Überzeugung gelangt, daß dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, zum Beispiel aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, daß er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere, ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich ein Mal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.“

Eine wichtige Ergänzung dieser kurzen Mitteilung lieferte dann der Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher, dessen zweiter, 1860 erschienener Band einige Briefe aus dem Jahre 1831 enthielt, die zeigten, daß Gauß damals im Besitze einer weit ausgebildeten nicht-euklidischen Geometrie war. Ein weiterer Brief aus dem Jahre 1846, der im fünften Bande des Briefwechsels 1863 erschien, war insofern von Wichtigkeit, als darin Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (1840) erwähnt und als meisterhafte Leistung bezeichnet werden. Wenn wir noch hinzufügen, daß 1877 zwei Briefe von Gauß an Bessel aus den Jahren 1829 und 1830 veröffentlicht worden sind, so haben wir wohl alles erschöpft, was bis jetzt von Gauß'schen Äußerungen über das Parallelenaxiom durch den Druck bekannt ist.

Der Nachlaß von Gauß ist Eigentum der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. —

Im Folgenden geben wir eine, wie wir hoffen, vollständige Sammlung aller bis jetzt gedruckten Äußerungen von Gauß über die Parallelen-theorie. Wir haben geglaubt, sie nach der Zeit ihrer Entstehung ordnen zu sollen; nicht als ob es dadurch möglich wäre, ein Bild von dem Entwicklungsgange der Gauß'schen Ideen zu ge-

winnen — dazu reicht das vorliegende Material nicht aus, es ist jedoch auf diese Weise immerhin erleichtert, die Bedeutung der Gedanken von Gauß gegenüber den gleichzeitigen Arbeiten in der Parallelentheorie zu würdigen.

Wir geben also im Folgenden:

- I. Einen Brief von Gauß an Wolfgang Bolyai vom Jahre 1799 nach dem Abdruck in den Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 22, 1877.
- II. Eine Besprechung in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816 (S. 617—622); wieder abgedruckt in Gauß' Werken, Bd. IV, Göttingen 1873, S. 364—368.
- III. Eine Besprechung ebendasselbst in dem Stück vom 28. Oktober 1822 (S. 1725—1728); wieder abgedruckt in den Werken Bd. IV, S. 368—370.
- IV. Zwei Briefe von Gauß und einen von Bessel aus den Jahren 1829 und 1830 nach dem Abdruck in dem Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Leipzig 1880, S. 490—497. Die beiden Briefe von Gauß waren bereits 1877 im 22. Bande der Göttinger Abhandlungen, jedoch ungenau, veröffentlicht worden.
- V. Einige Briefe von Gauß und Schumacher, die wir dem Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters, entnehmen, und zwar finden sich die Briefe vom Jahre 1831 im Bande 2, Altona 1860, S. 255—262, 266—272 und der Brief von Gauß vom Jahre 1846 im Bande 5, Altona 1863, S. 246—247.

Zwei noch nicht gedruckte Äußerungen von Gauß über die Parallelenfrage, die aus den Jahren 1820 und 1824 stammen, werden wir in dem letzten Abschnitte unsers Werkes mitteilen.

Litteratur.

- d'Alembert, *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, 4^{ème} éd. t. V. Amsterdam 1767. S. 200—219.
- d'Alembert, Artikel *Parallèle* in: *Dictionnaire encyclopédique des Mathématiques*, t. II. Paris 1789. S. 519.
- Bolyai, W., *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos . . . introducendi*. Bd. I. Maros Vásárhely 1832.
- Bolyai, W., *Kurzer Grundriss eines Versuchs usw.* Maros Vásárhely 1851.
- Bunjakofskij, *Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles*, lu le 27. oct. 1843, *Nouvelle théorie des parallèles*, lu le 12. déc. 1845. Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, 6^{ème} série. Sciences mathématiques et physiques. t. IV. Petersburg 1850. S. 87—108 und S. 207—232.
- Erdmann, B., *Die Axiome der Geometrie*, eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie. Leipzig 1377. Kapitel 1.
- Foncenex, Daviet de, *Sur les principes fondamentaux de la mécanique*. Miscellanea Taurinensia. t. 2. Année 1760—61. Torin 1761. S. 299—322.
- Fourier, *Séances des Écoles normales*. Débats. t. I. Nouvelle édition. Paris 1800. S. 28. (Séance An III, Pluviose II.)
- Genocchi, *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes*. Memorie dell' Accademia di Torino. Serie II. t. 29. 1878. S. 365.
- Günther, S., *Die Lehre von den Hyperbelfunktionen*. Halle 1881. Kapitel VI.
- Günther, S., Artikel *Seyffer* in der Allgemeinen Deutschen Biographie, Bd. 34, Leipzig 1892. S. 107.
- Halsted, George Bruce, *The Non-euclidean Geometry inevitable*. The Monist. Vol. 4. Chicago 1894. S. 483—493.
- Hessling, C. W., *Versuch einer Theorie der Parallelen*. Halle 1818. S. XXX.
- Hoüel, J., *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*. 1. éd. Paris 1867. S. 76; 2. éd. Paris 1883. S. 84.
- Laplace, S., *Exposition du système du monde*. Oeuvres t. V. S. 445.
- Legendre, A. M., *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*. Mémoires de l'Académie royale des Sciences. t. XII. Paris 1833. S. 365—410.
- Lorenz, J. F., *Grundriss der reinen und angewandten Mathematik*. Helmstedt 1791.
- Mansion, P., *Sur la Géométrie non euclidienne*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 13^{ème} année, Brüssel 1888/89. I. S. 57—61.
- Morgan, Augustus de, *Budget of Paradoxes*. London 1872. S. 173.
- Sartorius, W., von Waltershausen, *Gauß zum Gedächtnis*. Leipzig 1856. S. 81.

I.

Gauß an Wolfgang von Bolyai in Klausenburg. Ende 1799.

Es thut mir sehr leid, daß ich unsere ehemalige grössere Nähe*) nicht benutzt habe, um *mehr* von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiß dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein als jemand, wie ich, es sein kann, solange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu wünschen übrig ist.

Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewol mir meine anderen ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen) allein *der* Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele, das man wünscht, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie *nichts* beweiset.

Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, daß ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre, als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande, die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen.

Die meisten würden nun wol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wol möglich, daß, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter einer gegebenen Grenze wäre.

Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in Keinem finde ich etwas Befriedigendes.

*) [Bolyai hat von 1796 bis 1799 in Göttingen studiert; am 5. Juni 1799 reiste er von Göttingen nach seiner Heimat ab. Gauß hatte Göttingen bereits 1798 verlassen und sich dann teils in Braunschweig, teils in Helmstedt aufgehalten.]

II.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 63. Stück. Den 20. April 1816.

Stuttgart.

Typis J. F. Steinkopf: Commentatio in primum elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Auctore J. C. Schwab, Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali. 1814. 65 Seiten in Octav.

Maynz.

Auf Kosten des Verfassers und in Commission bey Florian Kupferberg: Vollständige Theorie der Parallel-Linien. Nebst einem Anhang, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt. 1815. 44 Seiten in Octav.

Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne daß wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, daß wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniß scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

Der Verfasser der erstern Schrift hatte bereits vor 15 Jahren in einer kleinen Abhandlung: „Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae“ einen ähnlichen Versuch gemacht, indem er Alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Er definirt Parallellinien als solche gerade Linien, die einerlei Lage haben, und schließt daraus, daß solche Linien von jeder dritten geraden Linie nothwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden müssen, weil diese Winkel nichts anders seien, als das Maas der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallellinien.

Diese Beweisart ist in der vorliegenden neuen Schrift wiederholt, ohne daß wir sagen könnten, daß sie durch die eingewebten philosophischen Betrachtungen an Stärke gewonnen hätte. Der Behaup-

tung S. 24: „Notionem situs e geometria adeo non excludi posse, ut potius notionibus ejus fundamentalibus annumeranda sit, *dudum omnes agnovere geometrae*“ muß in dem Sinne, in welchem der Verf. den Begriff Lage in seinem Beweise gebraucht, jeder Geometer widersprechen. Wenn wir von des Verfassers Definition: „Situs est modus, quo plura coëxistunt vel juxta se existunt in spatio“ ausgehen, so ist Lage ein bloßer Verhältniß-Begriff, und man kann wohl sagen, daß zwei gerade Linien *A, B* eine gewisse Lage gegen einander haben, die mit der gegenseitigen Lage zweier andern *C, D* einerlei ist. Aber der Verfasser gebraucht das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht coincidirenden geraden Linien spricht. Diese Bedeutung ist offenbar so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen was wir uns bei einer solchen Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit *einer* dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie Statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit *jeder* andern geraden Linie das Criterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage ohne Coincidenz möglich ist. Wir stehen mithin *nach* des Verf. Beweise noch gerade auf demselben Punkte, wo wir *vor* demselben standen.

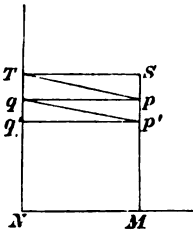
Ein großer Theil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant, daß die Gewißheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das Principium identitatis und das Principium contradictionis gründe. Daß von diesen logischen Hilfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht läugnen wollen: aber daß dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist. Herrn Schwabs Widerspruch scheint übrigens zum Theil nur auf Mißverständniß zu beruhen: wenigstens scheint uns, nach dem 16ten Paragraph seiner Schrift, welcher von Anfang bis zu Ende gerade das Anschauungsvermögen in Anspruch nimmt, und am Ende beweisen soll, „*postulata Euclidis in generaliora resolui posse, non sensu et intuitione, sed intellectu fundata*“, daß Hr. Schwab sich bei diesen Benennungen verschiedener Zweige des Erkenntnißvermögens etwas anderes gedacht haben müsse, als der Königsberger Philosoph.

Ogleich der Verfasser der zweiten Schrift seinen Gegenstand

auf eine ganz andere und wirklich mathematische Art behandelt hat, so können wir doch über das Resultat derselben nicht günstiger urtheilen. Wir haben nicht die Absicht, hier den ganzen Gang seines versuchten Beweises darzulegen, sondern begnügen uns, dasjenige hier herauszuheben, worauf im Grunde alles ankommt.

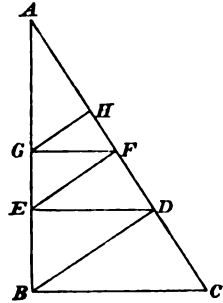
Man denke sich zwei im Punkte N unter rechten Winkeln einander schneidende gerade Linien, und fälle von einem Punkte S , der außerhalb dieser geraden Linien aber in derselben Ebene liegt, senkrechte auf dieselben ST und SM . Es kommt nun darauf an zu beweisen, daß MST ein rechter Winkel wird. Der Verf. sucht dies apagogisch zu beweisen; zuvörderst nimmt er an, MST sei spitz, fället von T auf MS das Perpendikel TP , und beweiset, daß p zwischen S und M fallen muß. Hierauf fället er wieder aus p auf NT das Perpendikel pq , wo q zwischen T und N fallen wird. Dann fället er abermals aus q auf MS das Perpendikel qp' , wo p' zwischen p und M liegen wird. Sodann abermals aus p' auf NT das Perpendikel $p'q'$ u. s. w.

Diese Operationen lassen sich ohne Aufhören fortsetzen, und so werden von der Linie MS nach und nach die Stücke Sp , pp' u. s. w. abgeschnitten, die jedes eine angebliche Gröfse haben, und deren Zahl unbegrenzt ist. Der Verfasser meint nun, daß dies widersprechend sei, weil auf diese Weise nothwendig MS zuletzt erschöpft werden müßte. Es ist kaum begreiflich, wie er sich auf eine solche Weise selbst täuschen konnte. Er macht sich sogar selbst den Einwurf, daß die Summe der Stücke Sp , pp' u. s. w., wenn diese Stücke immer kleiner und kleiner werden, doch, ungeachtet ihre Anzahl ohne Aufhören zunehme, nicht über eine gewisse Grenze hinaus wachsen könnte, und meint diesen Einwurf damit zu heben, daß jene Stücke, auch wenn sie immer kleiner und kleiner werden, doch immer größer bleiben, als *eine angebliche Gröfse*; nämlich jene Stücke sind Katheten von rechtwinkligten Dreiecken, und folglich immer größer als der Unterschied zwischen Hypotenuse und der anderen Kathete. Fast scheint es, daß eine grammatische Zweideutigkeit den Verf. irre geleitet hat, nämlich der zwiefache Sinn des Artikels *eine* angebliche Gröfse. Der Schluss des Verf. würde nur dann richtig sein, wenn sich zeigen liesse, daß die Stücke Sp , pp' u. s. w. immer größer bleiben, als *Eine bestimmte* angebliche Gröfse, z. B. als der Unterschied zwischen der Hypotenuse pT und der Kathete ST . Aber das läßt sich nicht beweisen, sondern nur, daß jedes Stück immer größer bleibt, als eine angebliche Gröfse,



die aber selbst für jedes Stück eine andere ist, nämlich Sp größer als der Unterschied zwischen pT und ST , ferner pp' größer als der Unterschied zwischen qp' und qp u. s. w. Hiemit verschwindet nun aber die ganze Kraft des Beweises.

Auf dieselbe Art, wie er seinen Beweis führen zu können geglaubt hat, könnte er auch beweisen, daß in einem ebenen Dreiecke ABC , worin B ein rechter Winkel ist, C nicht spitz sein könne; er brauchte nur aus B ein Perpendikel BD auf die Hypotenuse AC zu fallen, dann wieder das Perpendikel DE auf AB und so ohne Aufhören die Perpendikel EF, FG, GH u. s. w. wechselsweise auf AC und AB . Die Stücke CD, DF, FH u. s. w. sind immer größer als der angebliche Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete *desjenigen* rechtwinkligten Dreiecks, worin jede der Reihe nach die andere Kathete ist, demungeachtet erschöpft ihre Summe offenbar die Hypotenuse, AC nie, so groß auch ihre Anzahl genommen wird.



Wir müßten fast bedauern, bei so bekannten und leichten Dingen so lange verweilt zu haben, wenn nicht diese Schrift, deren Verf. es übrigens wirklich um Wahrheit zu thun zu sein scheint, durch die Art wie sie schon vor ihrer Erscheinung in öffentlichen Blättern angekündigt wurde, eine mehr als gewöhnliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Wir bemerken daher hier nur noch, daß der Verf. nachher auf eine ganz ähnliche, und daher eben so nichtige Art beweisen will, daß der Winkel MST nicht stumpf sein kann: allein hierbei ist doch ein wesentlicher Unterschied, weil in der That die Unmöglichkeit dieses Falles in aller Strenge bewiesen werden kann, welches weiter auszuführen aber hier nicht der Ort ist.

III.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 172. 173. Stück. Den 28. Oct. 1822.

Marburg.

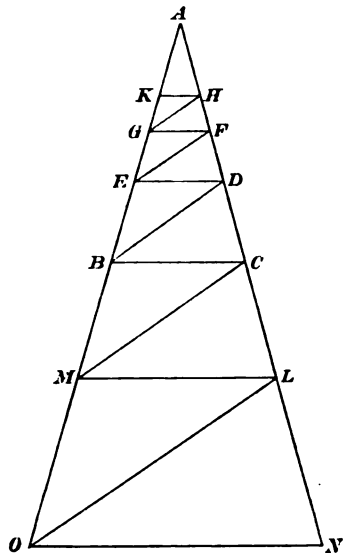
Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, Doctor der Philosophie, außerordentlichem Professor der Mathematik u. s. w. 1822. 40 S. in 4.

Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, daß alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallelinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben,

und kann nicht anders, als dies Urtheil auch auf alle späteren ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solcher Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesenen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswert, und Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemachte kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen. Den ganzen sinnreichen Ideengang des Verf. hier ausführlich darzulegen, wäre für unsre Blätter zu weitläufig und auch überflüssig, da die Schrift selbst gelesen zu werden verdient; aber sie hat ihre schwache Stelle, wie alle übrigen Versuche, und diese herauszuheben, ist der Zweck dieser Anzeige.

Wir finden diese schwache Stelle S. 15 in dem Beweise des Lehrsatzes des 15. Artikels. Dieser Lehrsatz ist der wahre Nerv der ganzen Theorie, welche fällt, so bald jener nicht streng bewiesen werden kann. Wir führen daher zuvörderst diesen Lehrsatz hier auf; die dazu gehörige Figur wird jeder leicht selbst zeichnen können.

Wenn jeder Winkel an der Grundlinie ON eines gleichschenkligen Dreiecks größer ist, als der Winkel an der Spitze A , und man setzt in O an die Seite OA einen Winkel von der Größe des Winkels A , dessen anderer Schenkel OL die AN in dem Punkte L zwischen A und N trifft, schneidet alsdann von AO ein Stück $OM = NL$ ab und zieht ML ; wenn man ferner in M an MA abermals einen Winkel von der Größe des Winkels A setzt, dessen anderer Schenkel MC die AN in dem Punkte C zwischen A und L trifft, hierauf von AM ein Stück $MB = LC$ abschneidet und BC zieht, und sodann diese Construction auf ähnliche Art fortsetzt, so daß auf der Linie OA die Punkte O, M, B, E, G, K u. s. w., auf der Linie NA hingegen die Punkte N, L, C, D, F, H u. s. w. liegen, so wird behauptet, daß die Stücke OM, MB, BE, EG, GK u. s. w. oder die ihnen resp. gleichen NL, LC, CD, DF, FH u. s. w. eine abweichende Progression bilden.



Den Beweis dieses Lehrsatzes sucht der Verfasser apagogisch so zu führen, daß er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz

nicht wahr wäre, aufzählt, und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versucht. Der Verf. behauptet nemlich, daß unter jener Voraussetzung einer von folgenden fünf Fällen Statt finden müßte. Die auf einander folgenden Stücke, von OM an gerechnet, wären

- 1) alle einander gleich, oder
- 2) jedes nachfolgende größer als das vorhergehende, oder
- 3) einige einander gleich und das darauf folgende größer oder kleiner, oder
- 4) einige auf einander folgende nähmen fortschreitend ab, und die darauf folgenden fortschreitend zu oder
- 5) sie würden abwechselnd größer und kleiner.

In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, daß die Stücke anfangs fortschreitend zu und dann fortschreitend abnehmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigentliche Auflösung des Gordischen Knotens. Inzwischen kann man zugeben, daß diese Auslassung hier in so fern wenig auf sich hat, als die Beweisart des Verf. für die Unstatthaftigkeit des dritten Falles, wenn sie zulässig wäre, auch auf diesen Fall von selbst erstreckt werden könnte. Allein eben diesem angeblichen Beweise der Unstatthaftigkeit des dritten Falls können wir keine Gültigkeit zugestehen. Der Verf. stellt die Sache so vor.

Wenn z. B., in dem dritten Falle angenommen wird, die beiden ersten Stücke seien gleich, das dritte aber größer, so wäre DC also größer als CL . Da nun aber AML gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, dem dieselbe Grundbedingung zukommt, wie dem ursprünglichen Dreieck AON , so müßte, wenn jener dritte Fall mit seiner angenommenen Unterabtheilung der gültige wäre, $DC = CL$ sein, in Widerspruch mit dem vorher gefundenen.

Wir haben, wie wir glauben, bei diesem Moment des Beweises, das worauf es ankommt, noch etwas klarer und bestimmter nach der Ansicht des Verf. angedeutet, als er es selbst gethan hat, wodurch dann aber auch die Schwäche desselben, wie uns scheint, leichter erkannt wird. Denn offenbar ist hier ganz willkürlich angenommen, daß bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel A an der Spitze und größern Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die im Lehrsatz angezeigte Construction vorgenommen wird, die Folge der abgeschnittenen Stücke in Rücksicht auf ihr Gleichbleiben, größer oder kleiner werden, allemal, unabhängig von der Größe der Seiten, nothwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident betrachtet werden darf. Da sich nun aber

hierauf allein der versuchte Beweis der Unstatthaftigkeit des dritten (wie auch vierten und fünften) Falls stützt, und der ganze Artikel auch keine andere Ressourcen zum Beweise der Unstatthaftigkeit des übergangenen Falls darbietet, so glauben wir hierdurch das oben ausgesprochene Urtheil hinlänglich gerechtfertigt zu haben, wobei wir aber gern der ganzen übrigen sinnreichen Durchführung in den folgenden Artikeln volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

IV.

Gauß und Bessel.

1. Aus einem Briefe von Gauß an Bessel, vom 27. Januar 1829.

(Briefwechsel S. 490.)

Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht; ich meine die ersten Gründe der Geometrie; ich weiß nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Überzeugung, daß wir die Geometrie nicht vollständig *a priori* begründen können, ist wo möglich noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine *sehr ausgedehnten* Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dieß auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Boeoter scheue, wenn ich meine Ansicht *ganz* aussprechen wollte. — Seltsam ist es aber, daß *außer* der bekannten Lücke in Euklid's Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie ausfüllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt, den meines Wissens niemand bisher gerügt hat, und dem abzuhelpen keineswegs leicht (obwohl möglich) ist. Dieß ist die Definition des *Planum* als einer Fläche, in der die *irgend zwei* Punkte verbindende gerade Linie *ganz* liegt. Diese Definition enthält *mehr*, als zur Bestimmung der Fläche nöthig ist, und involviret tacite ein *Theorem*, welches erst bewiesen werden muß*).

*) [R. Baltzer sagt in seinen *Elementen der Mathematik* (Bd. 2, zweite Auflage, Leipzig 1867, S. 5):

„*Deahna* (*Demonstratio theorematis, esse superficiem planam*. Dissertatio inauguralis. Marburg 1837) konstruirt die Ebene durch Rotation eines Winkels um einen seiner Schenkel mit der Bedingung, daß eine concentrische Kugelfläche in zwei congruente Teile zerschnitten werde. Gauß ist der Meinung gewesen, daß Deahna's Darstellung von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen sind, sich

2. Aus einem Briefe von Bessel an Gauß, vom 10. Februar 1829.

(Briefwechsel S. 493.)

Ich würde sehr beklagen, wenn Sie sich „durch das Geschrei der Boeoter“ abhalten ließen, Ihre geometrischen Ansichten aus einander zu setzen. Durch das was Lambert gesagt hat, und was Schweikardt mündlich äußerte, ist mir klar geworden, daß unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist, und wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks $= 180^\circ$ ist verschwindet. Das wäre die *wahre* Geometrie, die Euklidische die *praktische*, wenigstens für Figuren auf der Erde.

3. Aus einem Briefe von Gauß an Bessel, vom 9. April 1830.

(Briefwechsel S. 497.)

Wahre Freude hat mir die Leichtigkeit gemacht, mit der Sie in meine Ansichten über die Geometrie eingegangen sind, zumal da so wenige offenen Sinn dafür haben. Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre zu unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Größenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus *diejenige* vollständige Überzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, daß wenn die Zahl *bloß* unseres Geistes Product ist, der Raum auch außer unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.

V.

Gauß und Schumacher.

1831.

1. Schumacher an Gauß. Copenhagen, 1831. Mai 3.

(Briefwechsel, Bd. 2, S. 255.)

Ich bin so frei Ihnen anbei einen Versuch zu senden, ohne Parallelinien und ohne [ihre] Theorie zu gebrauchen, den Satz zu beweisen,

befreien lasse; in seinem Nachlasse befindet sich ein diesen Gegenstand betreffender { auch heute, 1895 noch nicht veröffentlichter } Aufsatz. Auf ähnliche Art haben *Crelle* (Journ. 45, p. 15), *Gerling* (Crelle J. 20, p. 332), *Erb* (die Probleme der Geraden u. s. w. Heidelberg 1846) das Axiom von der Ebene zu beseitigen gesucht.“]

daß die Summe aller drei Winkel eines gradlinichten Dreyeckes $= 180^\circ$ sey, aus dem dann der Beweis des Euclidischen Axioms folgen würde. Ich setze nichts voraus, als daß die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel $= 360^\circ = 4R$, und daß die Scheitelwinkel sich gleich sind.

Da ich aus Erfahrung weiß, wie sonderbar blind man (ich wenigstens) mitunter in Bezug auf eigene Arbeiten ist, so fürchte ich sehr, daß eine *petitio principii* dabei zum Grunde liegt. Ich bin aber jetzt nicht im Stande sie zu entdecken, und erwarte Belehrung von Ihnen.

[Beilage.] Man verlängere die Seiten eines gradlinichten Dreiecks ABC unbestimmt, oder man betrachte ein System von drei graden Linien in einer Ebene, deren Durchschnitte das Dreyeck ABC bilden, so geben die drei Winkelpunkte uns die Gleichungen:

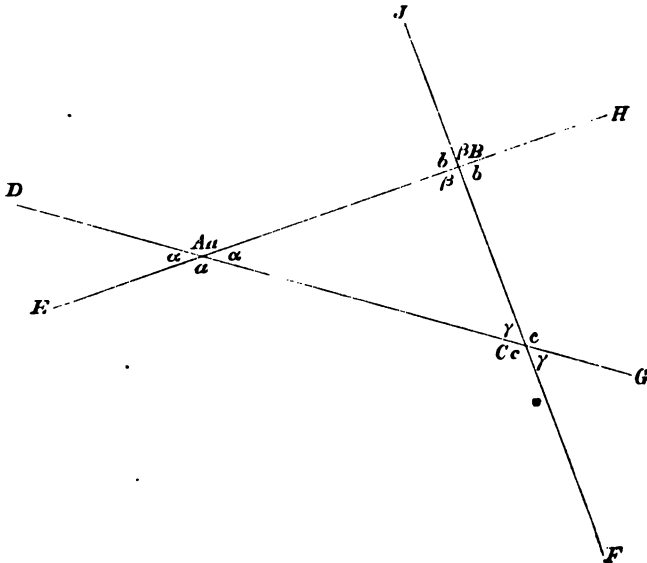
$$2a + 2\alpha = 4R,$$

$$2b + 2\beta = 4R,$$

$$2c + 2\gamma = 4R,$$

also

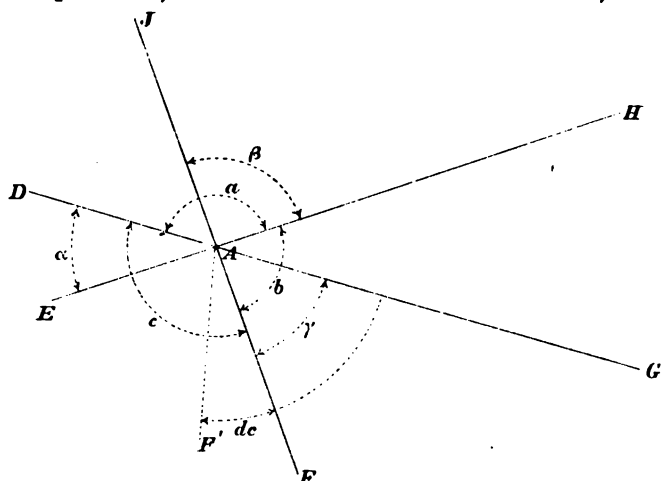
$$a + \beta + \gamma = 6R - (a + b + c).$$



[Fig. 1.]

Da diese Relationen bestehen wie auch die Punkte A, B, C liegen mögen oder, was einerley ist, wie auch die drei Linien im Raume [in der Ebene] gezogen sind, so lasse man die Linien DG, EH , unverrückt, und ziehe JF durch den Punkt A , so daß sie denselben Winkel

als in ihrer vorigen Lage mit EH macht oder, da dieser Winkel beliebig ist, überhaupt nur so, daß sie innerhalb des Winkel α fällt, so haben wir



[Fig. 2.]

$$a + b + c = 4 R$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 R.$$

Kann man dagegen sagen, daß freilich

$$b \text{ (1ste Figur) } = b \text{ (2te Figur)}$$

nach der Annahme, daß aber der Satz

$$c \text{ (1ste Figur) } = c \text{ (2te Figur)}$$

dann bewiesen werden müsse?

Mir scheint bei der Willkürlichkeit der Winkel dieser Beweis nicht nothwendig.

Dies sind die Grundzüge des Beweises und ich erwarte Ihre Entscheidung. Ich füge nur, um meinen Beweis zu rechtfertigen, hinzu, daß freilich durch die zweite Operation das Dreieck ABC verschwindet, aber nicht die Winkel des Dreiecks. Wie die Linien auch liegen, so ist immer

$$J\hat{B}H = \beta, \quad G\hat{C}F = \gamma, \quad D\hat{A}E = \alpha$$

im endlichen, so wie im verschwindenden Dreieck, mitunter die Summe

$$J\hat{A}H + G\hat{A}F + D\hat{A}E$$

immer gleich der Summe der Winkel eines gradlinichten Dreiecks.

Soll man also den Satz von einem beliebigen Dreiecke (dessen Winkel A, B, C) beweisen, so zieht man die Linien DG, EH , so daß

$$\alpha = A,$$

man nimmt ferner den Winkel $J\hat{A}H = B, G\hat{A}F = C$.

Ist dann JAF keine grade, sondern eine gebrochene Linie JAF' , so ist freilich der Winkel c dadurch um dc kleiner, der Winkel b aber um ebensoviel größer geworden, mithin ihre Summe unverändert geblieben, oder wir haben was zur Bringung des Beweises gehört

$$b + c \text{ (Fig. 1)} = b + c \text{ (Fig. 2)}.$$

2. Gauß an Schumacher. Göttingen, den 17. Mai 1831.

(Briefwechsel, Bd. 2, S. 260.)

Bei dem, was Sie über die Parallellinien schreiben, haben Sie, genau besehen in Ihren Syllogismen einen Zwischensatz gebraucht, ohne ihn ausdrücklich auszusprechen, der so lauten müßte:

Wenn zwei einander schneidende gerade Linien (1) und (2) mit einer dritten (3), von der sie geschnitten werden, respective die Winkel A' , A'' machen, und dann eine vierte (4) in derselben Ebne liegende Gerade von (1) gleichfalls unter dem Winkel A' geschnitten wird, so wird (4) von (2) unter dem Winkel A'' geschnitten werden.

Allein dieser Satz ist nicht bloß eines Beweises bedürftig, sondern man kann sagen, daß er im Grunde der zu beweisende Satz selbst ist*).

Von meinen eignen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahre alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches drei- oder viermal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, daß es nicht mit mir unterginge**).

3. Schumacher an Gauß. Lübeck, 1831. Mai 25.

(Briefwechsel Bd. 2, S. 261.)

Ich falle Ihnen, mein theuerster Freund! noch einmal mit der Parallelentheorie beschwerlich.

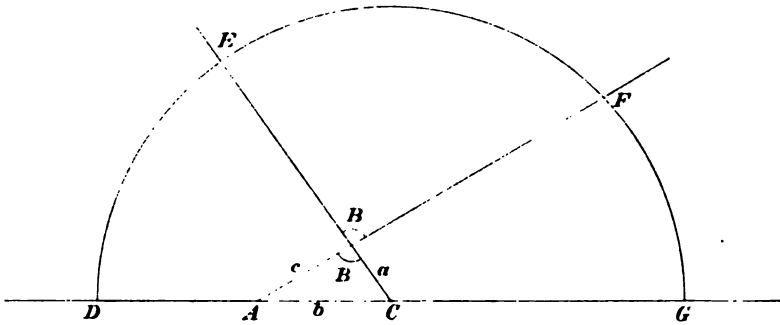
Man verlängere die Seiten des gradlinichten Dreyecks unbestimmt, und nehme einen Radius R so groß, daß $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, kleiner, als jede gegebene Größe werden. Mit diesem Radius beschreibe man

*) [Er besagt nämlich, daß in dem Viereck (1), (2), (3), (4) die Winkelsumme gleich vier Rechten ist.]

**) [Höüel machte zu dieser Stelle im Jahre 1867 folgende Anmerkung, die wir im Jahre 1895 nur wiederholen können:

„Als wir das Verzeichnis der Gegenstände durchsahen, die der vierte Band der Ausgabe der Werke von Gauß enthalten soll, welche gegenwärtig von der Akademie zu Göttingen veröffentlicht wird, haben wir keinen Artikel angezeigt gefunden, der sich auf den hier von dem großen Geometer angekündigten Plan bezieht. Es wäre sehr bedauerlich, wenn diese so tiefen und originalen Untersuchungen mit ihm untergegangen wären.“]

aus C den Halbkreis $DEFG$. Weil in Bezug auf diesen Halbkreis a, b, c als verschwindend zu betrachten sind, also die Punkte A, B ,



als in C fallend, so ist dieser Halbkreis das Maass der drei Winkel des Dreiecks, die mithin weniger als jede gegebene Gröfse von 180° differiren*).

Mir scheint, wenn man den Begriff des endlos wachsenden nicht ausschließt, so zeigt dieser Beweis sehr einfach, dafs in jedem endlichen gradlinichten Dreyecke die Summe der Winkel $= 180^\circ$ ist, oder eigentlich, dafs die Constante die, wenn Euclid's Geometrie nicht wahr wäre, zu der Summe der Winkel kommt, um die Gleichheit mit 180° zu bewürken, kleiner als jede gegebene Gröfse ist, und da sich dies für jedes Dreieck beweisen läfst, so kann diese Constante ebensowenig von der Gröfse des Dreiecks abhängen.

4. Schumacher an Gauß. Altona, 1831. Junius 29.

(Briefwechsel Bd. 2, S. 267.)

Nur etwas habe ich in Ihrem Briefe vermifst — Ihr Urtheil über meinen Beweis, dafs die Summe der Winkel in einem gradlinichten Dreiecke nur um eine Gröfse, die kleiner als jede gegebene ist, von 180° verschieden sey. Sie können leicht denken, dafs mir Ihr Urtheil sehr wichtig ist, da Sie jede Schwäche eines Beweises so leicht entdecken. Ausser Ihnen, meinen Gehülffen, und Professor Hausen vom Seeberg habe ich noch Niemanden etwas mitgetheilt. Keiner von uns kann einen Paralogismus entdecken.

Sollte jemand den Satz, dafs man die Winkelpunkte eines Dreiecks als coincidirende Mittelpunkte eines Kreises von unendlichem (brevitatis causa unendlich genannt) Halbmesser betrachten könne,

*) [Dasselbe Beweisverfahren hat bereits der Theologe *Antoine Arnaud* (1612—1694) angewandt (vergl. *A. Transon*, *Comptes rendus*, t. 73. 1871. S. 368). Später haben es *Bertrand* (1778) und *Schulz* (1784) benutzt.]

eines Beweises bedürftend halten, obgleich ich dies nicht glaube, so läßt sich dieser Beweis strenge führen.

Mir scheint, wenn zwei Punkte eine endliche Entfernung von einander haben, so wird diese Entfernung in Bezug auf eine unendliche Linie = 0 zu setzen seyn, sie coincidiren mithin in Bezug auf diese unendliche Linie betrachtet.

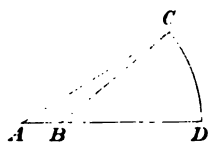
5. Gauß an Schumacher. Göttingen, den 12. Julius 1831.

(Briefwechsel, Bd. 2, S. 268.)

Was die Parallellinien betrifft, so würde ich Ihnen mein Urtheil sehr gern schon auf Ihren ersten Brief geschrieben haben, wenn ich nicht hätte voraussetzen müssen, daß Ihnen mit demselben ohne vollständige Entwicklungen wenig gedient sein würde. Zu solchen vollständigen Entwicklungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen, würden aber vielleicht bogenlange Auseinandersetzungen in Erwiderung auf das, was Sie in wenigen Zeilen im Grunde nur angedeutet haben, nöthig sein, zu welchen Auseinandersetzungen mir aber gegenwärtig die erforderliche Geistesheiterkeit fehlt*). Um Ihnen jedoch meinen guten Willen zu bethätigen, will ich folgendes hersetzen.

Die eigentliche Pointe richten Sie sogleich auf jedes Dreieck; allein Sie würden im Grunde Ihr nemliches Raisonnement anwenden, wenn Sie das Geschäft zuerst auf den einfachsten Fall anwendeten und den Satz aufstellten:

1) In jedem Dreieck, dessen eine Seite endlich, die zweite und folglich auch die dritte hingegen unendlich ist, ist die Summe der beiden Winkel an jener = 180° .



Beweis nach Ihrer Manier: Der Kreisbogen CD ist eben so gut das Maas des Winkels CAD als CBD , weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verrückung des Mittelpunkts für 0 zu achten ist. Also $CAD = CBD$,

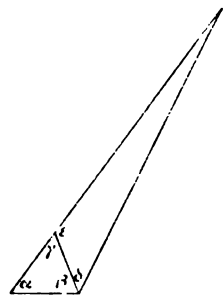
$$CAD + CBA = CBD + CBA = 180$$

Das Übrige ergibt sich leicht von selbst. Es ist nemlich: nach diesem Lehrsatz:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 180 \\ 180 &= \varepsilon + \delta \\ \gamma + \varepsilon &= 180 \end{aligned} \right\}$$

Also addendo

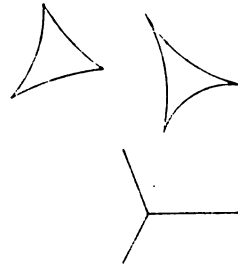
$$\alpha + \beta + \gamma = 180.$$



*) [Gauß' Frau war damals krank. Sie ist im September des Jahres gestorben.]

Was nun aber Ihren Beweis für 1) betrifft, so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen GröÙe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nicht-Euclidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes, wenn gleich diejenigen viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervor gebracht von der frühern Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.

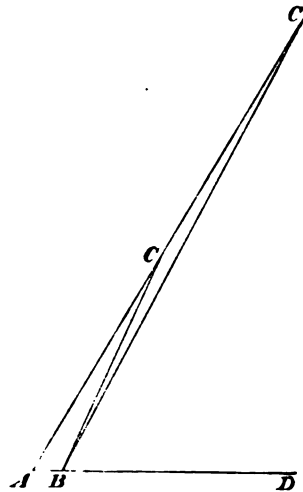
In der Nicht-Euclidischen Geometrie gibt es gar keine ähnliche Figuren ohne Gleichheit, zum Beispiel die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloß von $\frac{2}{3} R$, sondern auch nach Maafsgabe der GröÙe der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. Es ist daher schon an sich widersprechend, ein solches Dreieck durch ein kleineres zeichnen zu wollen, man kann es im Grunde nur bezeichnen.



Die Bezeichnung des unendlichen Dreiecks in diesem Sinne wäre am Ende*)

In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut großes, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, dies ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die dies nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie, aber wie gesagt, nach meiner Überzeugung ist dies bloße Selbsttäuschung.

Für den fraglichen Fall ist nun durchaus nichts widersprechendes darin, daß wenn die Punkte A , B und die Richtung AC gegeben sind, während C ohne Beschränkung wachsen kann, daß dann obgleich so DBC dem DAC immer näher kommt, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche Differenz heruntergebracht werden könne.



*) [Die Figur soll wohl andeuten, daß die Winkel gleich Null sind.]

Ihr Hineinziehen des Bogens CD macht allerdings den Schluss um viel captiöser, allein wenn man, was Sie nur angedeutet haben, klar entwickeln will so müßte es so lauten:

Es ist:

$$\begin{aligned} CAB : CBD &= \\ &= \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'} \end{aligned}$$

und indem AC in's unendliche wächst, kommen CD und CD' einerseits und ECD , $E'CD'$ andererseits der Wahrheit immer näher.

Beides ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter versteht, daß ihre geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen, wie man will. In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$:

$$= \frac{1}{2} \pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$$

wo k eine Constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, daß sie gegen alles durch uns meßbare ungeheuer groß sein muß. In Euklid's Geometrie wird sie unendlich.

In der Bildersprache des Unendlichen würde man also sagen müssen, daß die Peripherien zweier unendlichen Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Größe verschieden sind, selbst um eine Größe verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältniß hat.

Hierin ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermißt, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.

Sie sehen, daß hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.

6. Schumacher an Gauß. Altona, 1831, Julius 19.

(Briefwechsel Bd. 2, S. 272.)

Meinen herzlichsten Dank statte ich Ihnen, mein theuerster Freund, für Ihren letzten Brief ab. Ich kann nicht sagen, daß er mich schon überzeugt hätte. Ich glaube die unendliche Größe nicht als geschlossen gebraucht zu haben. Mir scheint man kann zeigen, daß mit dem Wachsen des Halbmessers die Differenz der Winkelpuncte des Dreyecks immer mehr verschwindet, und sich der Gränze des Zusammen-

fallens, so viel man immer will, nähert. Sagt man also, der Kürze halber, sie fallen für einen unendlichen Radius wirklich zusammen, so wird dies ebenso wie gewöhnlich verstanden, und es folgt daraus, daß in Bezug auf die Peripherie, die von den graden Linien interceptirten Bögen, sich ohne Gränze dem Maafse der Winkel nähern.

Indessen gebe ich gern zu, daß ich mich täusche, und werde theils selbst die Sache reiflicher durchdenken, theils und vorzüglich den Augenblick erwarten, wo mündliche Belehrung von Ihrer Seite möglich wird. Warum man bei Linien nicht, wie bei allgemeinen Gröfsen, Schlüsse brauchen soll, die sich auf ohne Ende wachsende Linien gründen, sehe ich nicht ein, vorausgesetzt, daß man die Gränzen bestimmen kann, denen man sich dabei, so weit man will, nähert.

1846.

7. Gauß an Schumacher. Göttingen, den 28. Nov. 1846.

(Briefwechsel Bd. 5, S. 246.)

Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von Lobatschewski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien. Berlin 1840, bei G. Funcke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müßte und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euclidische nicht die wahre ist. Ein gewisser Schweikardt*) nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatschewsky imaginaire Geometrie. Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will). Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschewsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschewsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiß ganz exquisiten Genuß gewähren wird.

*) Früher in Marburg, jetzt Professor der Jurispr. in Königsberg. [Diese Anmerkung rührt von Gauß her.]

Abweichungen von den Originalabdrücken.

- S. 220, Z. 1 v. u. (Gött. gel. Anz. 1816, S. 618, Z. 5 v. u.). Im Urtext steht „Die“ statt „Der“.
- S. 221, Z. 3 v. o. (a. a. O. S. 618, Z. 1 v. u.) „welchen“ statt „welchem“.
- S. 222, Z. 14 v. u. (a. a. O. S. 621, Z. 12 v. o.) „ihre“ statt „ihrer“.
- S. 223, Z. 6 v. o. (a. a. O. S. 622, Z. 1 v. o.) „in einen ebne“ statt „in einem ebne“.
- S. 224, Z. 11 v. u. (Gött. gel. Anz. 1822, S. 1726, Z. 15 v. u.) „NB“ statt „MB“.

Die Figuren auf Seite 222 und 224 sind den von Gaußs besprochenen Abhandlungen entnommen, die auf Seite 223 ist neu gezeichnet. Die Rechtschreibung der Gött. gel. Anz. ist beibehalten, ausgenommen in Wörtern wie Dreyeck, gleichschenkligh, mehrmals und dergleichen. In einem Briefe an Schumacher, vom 6. Januar 1833 (Briefwechsel Bd. 2, S. 320) sagt Gauß: „Ich schreibe nicht bey nahe, drey, interpolieren, &c., sondern beinahe, drei, interpoliren.“

- S. 227, Z. 16 v. o. (Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, S. 497, Z. 7 v. o.) „in“ statt „zu“. Diese Abweichung, die der Sinn des Textes erfordert, findet sich bereits in dem S. 217 erwähnten ersten Abdruck des Briefes.
- S. 228, Z. 4 u. 13 v. o. (Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher, Bd. 2, S. 256, Z. 4 v. o. und 6 v. u.) „Wechselwinkel“ statt „Scheitelwinkel“ und „und“ statt „uns“.
- S. 235, Z. 18 v. o. (ebenda Bd. 5, S. 247, Z. 1 v. o.) „Parallellinie“ statt „Parallelinien“.

Die Figuren auf Seite 229 und 231 sind gegenüber den Originalfiguren etwas verändert: bei der ersten ist c im Original kein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A , bei der zweiten fällt der Mittelpunkt des Kreises im Original nicht in den Punkt C , was doch nach dem Texte der Fall sein muß.

In einem Briefe an Schumacher, vom 2. Januar 1836 (Briefwechsel Bd. 2, S. 431) berührt Gauß einen Beweisversuch von Lübsen, der sich wohl auch auf die Parallelentheorie bezog. Die Stelle ist jedoch an und für sich kaum verständlich und auch zu unbedeutend, um mitgeteilt zu werden.

Ebensowenig haben wir es für nötig gehalten, solche Äußerungen von Gaußs mitzuteilen, die sich bloß auf den Raumbegriff im Allgemeinen beziehen, ohne auf die Parallelentheorie insbesondere Licht zu werfen.

FERDINAND KARL SCHWEIKART

1780—1857.

FRANZ ADOLPH TAURINUS

1794—1874.

Als nach Gaußs' Tode bekannt wurde, daß der „princeps mathematicorum“ von der Möglichkeit und der Berechtigung einer nicht-euklidischen Geometrie überzeugt gewesen war, da wandte sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker dem Probleme der Parallelentheorie wieder zu.

In der Periode von 1780 bis 1830 waren alle Beweisversuche gescheitert, und man war schließlich dahin gelangt, die Beschäftigung mit der „berüchtigten“ fünften Forderung als Vorrecht unklarer Köpfe anzusehen und mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises und um das Perpetuum mobile auf eine Stufe zu stellen. Dieses Vorurteil war so stark, daß, um mit Hoüel zu reden, selbst ein Mann von so imposanter Autorität wie Gauß mit seinen Untersuchungen nicht hervortrat, „weil er das Geschrei der Bæoter scheute.“

Jetzt wurde es anders, und zwar war es R. Baltzer, der in der zweiten Auflage seiner Elemente auf Gaußs' Ansicht über die Parallelentheorie hinwies und die bis dahin nicht beachteten Untersuchungen von Nikolaus Lobatschewskij und Johann Bolyai nach Verdienst würdigte.

Durch Baltzer angeregt gab Hoüel 1866 Lobatschewskijs „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ (1840) und 1867 Johann Bolyais „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens“ (1832) in französischer Übersetzung heraus und machte so diese seltenen Schriften einem größern Kreise zugänglich. Der Übersetzung von Lobatschewskijs Abhandlung war als Anhang eine Übersetzung der schon mitgeteilten Briefe von Gauß und Schumacher beigelegt. Es folgte die italienische Übersetzung des Appendix von Battaglini (1868) und die deutsche Bearbeitung von Frischauf (1872). In jüngster Zeit sind diese Schriften von Lobatschewskij und Bolyai auch ins Englische übertragen worden (Halsted 1891).

Da Lobatschewskij und Bolyai als die eigentlichen Begründer der nichteuklidischen Geometrie anzusehen sind, wollen wir über ihre Arbeiten einiges mitteilen. Genauer auf deren Inhalt einzugehen, ist

an dieser Stelle nicht möglich; wohl aber können wir auf Grund neuerer Forschungen des Baumeisters Fr. Schmidt in Budapest und des Professors A. Wassiljef in Kasan eine geschichtliche Darstellung geben, die über das bis jetzt Bekannte hinaus geht.

Nikolaus Lobatschefskij (1793—1856) hat bereits in den Jahren 1815 und 1816 an der Universität zu Kasan Vorlesungen über Geometrie gehalten. Ein von Wassiljef Anfang 1894 gefundenes Heft enthält drei verschiedene Versuche, die Parallelen-theorie zu verbessern. „In dem einen wird der Begriff der Richtung als der fundamentale vorausgesetzt; im zweiten werden die Betrachtungen über die unendlichen Zweiecke eingeführt [Bertrand 1778, Schulz 1784]; der dritte Beweis schließt sich an den Legendre'schen Beweis an, daß die Summe der Winkel des Dreiecks nicht größer und nicht kleiner als zwei Rechte ist. Man sieht also, daß bei Lobatschefskij eine langjährige Denkarbeit der Veröffentlichung von 1826 seiner eigentümlichen Anschauungen über die Parallelen-theorie vorausgegangen ist.“ Soweit Wassiljef.

Wir müssen hierzu Folgendes bemerken. Am 11. Februar 1826 (alten Stiles) legte Lobatschefskij der physisch-mathematischen Abteilung der Universität Kasan eine Abhandlung vor: *Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*. Diese Abhandlung ist jedoch niemals veröffentlicht worden. Ein Auszug aus ihr ist die russisch geschriebene Abhandlung: *Über die Anfangsgründe der Geometrie*, die im Jahre 1829 im Kasaner Boten erschienen ist (Lobatschefskijs Gesammelte geometrische Werke, Bd. 1, S. 1—67).

In dieser Veröffentlichung von 1829 hatte Lobatschefskij die Möglichkeit einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie bewiesen. Eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen, die er über diesen Gegenstand angestellt hat, enthalten die „Neuen Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen“, die 1835—1838 in den Schriften der Universität Kasan erschienen sind. Ein Auszug aus diesen in russischer Sprache geschriebenen Abhandlungen ist die *Géométrie imaginaire*, die Lobatschefskij im Jahre 1837 in Crelles Journal veröffentlichte. Seine Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von 1840 haben wir bereits erwähnt. Eine zusammenfassende Bearbeitung aller seiner Untersuchungen, die Pangeometrie, ist 1855 gleichzeitig in russischer und in französischer Sprache erschienen.

Alle diese Schriften sind jetzt in den Gesammelten geometrischen Werken vereinigt; der erste Band (1883) enthält die in russi-

scher Sprache, der zweite (1886) die in deutscher und französischer Sprache verfaßten Schriften; ihnen geht eine Lebensbeschreibung voraus.

Wolfgang Bolyai (1775—1856) aus Bolya in Siebenbürgen, ein Jugendfreund von Gauß, mit dem zusammen er in Göttingen studiert hat, veranlaßte seinen Sohn Johann (1802—1860) sich mit der Parallelentheorie zu beschäftigen, der er selbst schon früh sein Interesse zugewandt hatte. Am 3. November 1823 berichtet Johann seinem Vater:

„Ich habe mich entschlossen, sobald die Sachen geordnet sind, eine Arbeit über die Parallelen herauszugeben. Es ist noch nicht abgeschlossen, aber der Weg, den ich eingeschlagen, verspricht gewiß die Erreichung des Zieles, wenn es überhaupt erreichbar ist. Es ist noch nicht erreicht, aber ich habe Sachen herausgebracht, daß ich selbst darüber erstaunte. Es wäre ewig schade, wenn sie verloren gingen. Sie werden dieselben erkennen. Ich kann nur sagen: daß ich aus nichts eine andre neue Welt geschaffen habe. Was ich Ihnen bishero gesendet habe, verhält sich wie ein Kartenhaus zu einem Thurme.“*)

In einer nicht veröffentlichten Selbstbiographie, deren Abfassungszeit Fr. Schmidt in die fünfziger Jahre setzt, schreibt Johann Bolyai:

„Erst im Jahre 1823 habe ich dem Wesen nach das Problem durchdrungen, obschon auch nachher noch Vervollkommnungen hinzukamen. Ich theilte im Jahre 1825 meinem einstmaligen Lehrer Herrn Johann Walter von Eckwehr. (später k. k. General) einen schriftlichen Aufsatz mit, der sich noch in seinen Händen befindet. Auf Veranlassung meines Vaters habe ich meinen Aufsatz in lateinische Sprache übersetzt, wo selber als Appendix zum Tentamen 1832 erschienen ist.“

Dieses gegenwärtig recht selten gewordene Tentamen war ein zweibändiges Lehrbuch der Mathematik, dessen vollständiger Titel lautet: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici.* Band I; Maros Vásárhely 1832. 8°. In dem dritten Anhange, der nur 28 Seiten umfaßt, hat Johann Bolyai seine neue Geometrie entwickelt; der Titel lautet:

Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a

*) Der Brief *Johanns* ist ursprünglich in magyarischer Sprache geschrieben; die deutsche Übersetzung, die wir mitteilen, verdanken wir Herrn Baumeister *Fr. Schmidt* in Budapest.

veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Iohanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensi Capitano.

Die ungarische Akademie der Wissenschaften hat mit der Herstellung eines Neudrucks begonnen, der hoffentlich bald zu Ende geführt sein wird.

Einen Auszug aus dem Tentamen giebt das 1851 zu Maros Vásárhely erschienene, ebenfalls recht seltene Werkchen Wolfgang Bolyais:

Kurzer Grundriss eines Versuchs

I. Die Arithmetik, durch zweckmässig konstruirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.

II. In der Geometrie, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krümmen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen; sondern auch ihr Seyn im Raume zu beweisen: und da die Frage, ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht $= 2R$, sich schneiden oder nicht? niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie Euklid das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die Ja-Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, daß die Formeln der letzten, auf einen Winkel auch in der ersten gültig seyen.

Nach einem lateinischen Werke von 1829. *) M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen.

Maros Vásárhely 1851. 8°, 88 Seiten.

Was endlich das Verhältniß von Lobatschewskij und Bolyai zu Gaußs betrifft, so sagt F. Klein in seinen Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie (1889/90): „Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß Gauß durch seinen Einfluß die Untersuchungen von Lobatschewsky und Bolyai angeregt hat.“ Er beruft sich dabei auf die Thatsache, daß Gauß und Wolfgang Bolyai Universitätsfreunde waren, und zwischen Gaußs und Lobatschewskij will er einen Zusammenhang daraus herleiten, daß Lobatschewskij Schüler von Bartels (1769—1836) gewesen ist, über dessen freundschaftliche Beziehungen zu Gaußs uns Sartorius von Waltershausen berichtet hat.

*) Gemeint ist das Tentamen, dessen Druckerlaubnis vom 12. Oktober 1829 datiert, dessen I. Band jedoch erst 1832 erschienen ist.

Eine Entscheidung über die Richtigkeit dieser Vermutungen wird kaum möglich sein, solange der Nachlaß von Gauß der Forschung unzugänglich ist.

Außer Lobatschefskij erwähnt Gauß in seinem Briefe an Schumacher vom 28. Nov. 1846 noch einen andern Namen: „Ein gewisser Schweikardt . . . nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie“; auf Unterhaltungen mit demselben Schweikardt hatte sich schon Bessel im Jahre 1829 berufen und mit ihm zugleich Lambert genannt. Es schien uns von Interesse zu sein, etwas Genaueres über diesen bis jetzt nicht beachteten Mann zu ermitteln, und wir haben Folgendes feststellen können:

Ferdinand Karl Schweikart (1780—1857) studierte von 1796 bis 1798 in Marburg Rechtswissenschaften; daneben hörte er mathematische Vorlesungen bei J. K. F. Hauff, der seit 1793 verschiedene Schriften über die Parallelenfrage veröffentlicht hat. Von 1812 ab war Schweikart in Charkow, von 1816 ab in Marburg und zuletzt, seit 1820, in Königsberg Professor der Rechtswissenschaften.

Schweikarts einzige Veröffentlichung mathematischen Inhalts ist die 1807 erschienene Schrift: *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie*. Jena und Leipzig 1807. 8°. 138 S. mit 5 Tafeln. *) Sie enthält nicht etwa, wie der Titel vermuten lassen könnte, den Versuch einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie, vielmehr steht Schweikart hier durchaus auf dem Boden der Euklidischen Elemente, die er nur auf Grund philosophischer Erwägungen formal umgestalten will: statt von Parallelen soll nur von Parallelogrammen die Rede sein.

Später hat Schweikart Untersuchungen angestellt, die mit denen von Saccheri und Lambert auf eine Linie zu stellen sind, und ist schließlichs unabhängig von Gauß zur Entwicklung einer nicht-euklidischen Geometrie gelangt.

Als Beleg für die eben ausgesprochenen Behauptungen kann zunächst ein Brief dienen, den Gerling (1788—1864), ein Schüler von Gauß, seit 1817 Professor der Astronomie in Marburg, am 31. Oktober 1851 an Wolfgang Bolyai zum Dank für die Übersendung des Kurzen Grundrisses geschrieben hat. In diesem bemerkenswerten Briefe, von dem wir eine Abschrift der Güte des Bau-meisters Fr. Schmidt in Budapest verdanken, sagt Gerling:

*) Diese seltene Schrift besitzen von den größeren Büchersammlungen Deutschlands nur die Königliche Universitätsbibliothek in *Kiel* und die Königliche Hof- und Staatsbibliothek in *München*.

„Meine früheren Beschäftigungen mit der Parallelentheorie erwähne ich nicht, denn schon im Jahre 1810—1812 hatte ich bei Gaußs, sowie früher 1809 bei J. F. Pfaff einsehen gelernt, wie alle bisherigen Versuche das Euklidische Axiom zu beweisen mißlungen waren. Ich hatte dann auch vorläufige Kenntniss von Ihren Arbeiten erhalten, und so schon, als ich zuerst 1820 etwas von meiner Ansicht darüber drucken lassen mußte, es genau ebenso geschrieben, wie es S. 187 der neuesten Ausgabe noch zu lesen steht.“

Gerling meint hier die Bearbeitung des Lorenzschen Grundrisses der reinen Mathematik, die er 1820 besorgt hatte; die im Briefe erwähnte neueste Ausgabe war 1851 erschienen. An der betreffenden Stelle heisst es: „Dieser Beweis [des Parallelenaxioms] ist auf mannigfaltige Weise von scharfsinnigen Mathematikern versucht, aber bis jetzt noch nicht vollkommen genügend aufgefunden worden. Solange er fehlt, bleibt der Satz, sowie alles, was sich auf ihn stützt, eine Hypothese, deren Gültigkeit für unser Leben freilich hinlänglich durch die Erfahrung dargethan wird, deren allgemeine, nothwendige Richtigkeit aber ohne Absurdität bezweifelt werden könnte.“

Gerling fährt fort:

„Wir hatten gegen diese Zeit [1819] hier einen juristischen Professor Schweikart, welcher ehemals in Charkow gewesen war, und auf ähnliche Ideen gekommen war, indem er ohne Hilfe der euklidischen Axiome eine Geometrie, die er Astralgeometrie nannte, in ihren Anfängen entwickelte. Was er mir darüber mittheilte, schickte ich Gaußs, der dann mittheilte, wieviel weiter man schon auf diesem Wege gekommen und später auch sich über den grossen Gewinn erklärte, der in dem Appendix zu Ihrem Buche den wenigen Sachkennern dargeboten ist.“

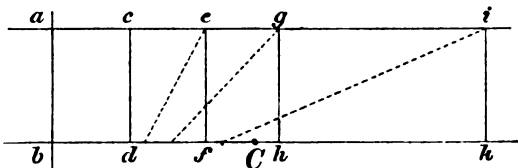
Dieser Brief von Gerling zeigt, daß der noch nicht veröffentlichte Briefwechsel zwischen Gaußs und Gerling wertvolle Aufschlüsse über die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie enthalten muß.

Glücklicherweise ist uns von jenem Gaußs'schen Briefe an Gerling, der sich auf die Astralgeometrie bezog und der wegen seiner frühen Abfassungszeit, stammt er doch aus dem Jahre 1819, von hervorragender Bedeutung ist, ein Bruchstück erhalten, und zwar in einem Schreiben, das Schweikart im Jahre 1824 seinem Neffen Taurinus zugehen liefs. Wir verdanken dieses Schreiben der Güte des Herrn Pastor A. Fürer in Merseburg, der uns auch einen weiteren Brief von Schweikart an Taurinus, sowie einen Brief von Gaußs an Taurinus zur Verfügung gestellt hat. Auch diese beiden Briefe werden hier zum ersten Male zur Veröffentlichung gelangen.

Am 18. November 1824 schreibt Schweikart von Königsberg aus an seinen Neffen Taurinus in Köln:

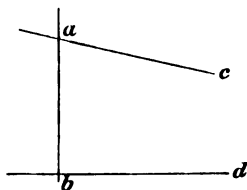
„Sehr richtig hast Du den Grundfehler meiner Demonstrationen*) in dem Postulat von Quadraten gefunden. Deiner Auflösung, welche Dir alle Ehre macht (wiewohl sie schon mehrere auf ähnliche Art versucht haben) würde ich unbedingt beitreten, wenn nicht ein kleiner Umstand im Wege stünde.

„Du nimmst an, daß $bd = df = fh$, das wäre mir unbedenklich, wenn Du von d, f, h Lothe auf die entgegengesetzte Linie fallen ließest; allein Du läßt von c, e, g Lothe auf bh fallen, — wie willst Du es nun machen, daß diese gerade nach d, f kommen? Du bedarfst eines Axioms,



das auf gleiche Art eines Beweises bedarf, wie das Euclidische, nämlich entweder das: wenn man in einem Punkt**) d , der Linie bh ein Loth errichtet, so muss es hinlänglich verlängert die ag schneiden; oder das: wenn man auf der Linie ag einen überaus entfernten Punkt i annimmt & von da eine Linie ik unter einem rechten Winkel auf die bh fallen läßt, so ist bk größer, als eine gegebene Linie bh . Allein es ist möglich, dass die Punkte f, h, k , ob sie gleich alle hinter d kommen einem gewissen Punkte z. B. C sich immer mehr nähern, ohne ihn jemals zu erreichen.

„Nach der neuen Geometrie, die ich, wie ich Dir einst nach Göttingen schrieb, gefunden habe, verhält sich die Sache wirklich so. Es gibt eine gewisse constante Linie bC , welche alle Lothe von der, noch so weit verlängerten ag auf bh , nicht überschreiten können. Die Winkel im Dreyeck sind immer kleiner als $2R$ und um so kleiner, je größer das Dreyeck ist. Aus der Summe der Winkel läßt sich jedenfalls der Inhalt des Dreyecks bestimmen und umgekehrt. Der Satz, daß ac & bd verlängert zusammentreffen müssen, wenn $bac + abd < 2R$, ist unwahr. Es hängt davon ab, wie groß ab ist. Eben so giebt es eine Constante für den Flächeninhalt geradliniger Figuren, die sie, man mag ihre Seiten noch so groß machen, nie erreichen können.



„Auf eine Notiz hierüber, die ich vor länger als 5 Jahren meinem

*) [In der Schrift über die Theorie der Parallellinien, vom Jahre 1807.]

**) [Im Original steht „auf einen Punkt.“]

Freunde Gerling in Marburg & dieser Gaußsen mitgetheilt hatte, antwortete letzterer unter andern:

„Die Notiz von \mathcal{H}_i Pr. Schw. hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht, und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben.

„Nur bloß bey dem einen Artikel, der so anfängt: ist diese Constante für uns die halbe Erdaxe & — & — &.

„Ich vermuthe, daß \mathcal{H}_i Schw. mit allem diesem einverstanden seyn wird, was mich bey dem gänzlichen Zusammentreffen seiner Ansicht mit der meinigen sehr freuen wird. *Ich will hinzufügen, dass*)* ich die Astralgeometrie (so hatte ich sie zum Unterschiede genannt) so weit ausgebildet habe, daß ich alle Aufgaben vollständig lösen kann, sobald die Constante = C gegeben wird. &—&. Die Gränze für den Inhalt eines jeden Dreyecks ist dann: $\frac{\pi CC}{(\log. \text{hyp. } (1 + \sqrt{2}))^2}$, & also für das Polygon $\frac{(n-2) \pi CC}{(\log. \text{hyp. } (1 + \sqrt{2}))^2}$.“

Das ist freilich Alles, was wir über Schweikart mittheilen können, denn dieser hat — ebenso wie Gauß — seine Untersuchungen über die Astralgeometrie nicht veröffentlicht, und unsre Bemühungen, in den Besitz von Aufzeichnungen aus seinem Nachlasse zu gelangen, sind bis jetzt ohne Erfolg geblieben. Dagegen haben unsre Nachforschungen in Betreff jenes Neffen Schweikarts, des Taurinus, zu dem überraschenden Ergebnis geführt, daß auch Taurinus für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie von Bedeutung ist: zuerst angeregt durch seinen Oheim Schweikart, dann beeinflusst durch Gauß hat er bemerkenswerte selbständige Untersuchungen angestellt und in den Jahren 1825 und 1826 veröffentlicht. Er ist darin schließlicb zur Entwicklung einer nichteuklidischen Trigonometrie gelangt und hat somit einen wichtigen Teil der Ergebnisse von Lobatschefskij und Bolyai vorweg genommen.

Über das Leben von Taurinus haben wir Folgendes ermittelt:

Franz Adolph Taurinus ist am 15. November 1794 zu König im

*) [Das *cursiv* Gedruckte ist unsere Ergänzung, da der Originalbrief leider an der betreffenden Stelle beschädigt ist. Sollten wir auch den *Wortlaut* der Gauß'schen Äußerungen nicht genau getroffen haben, so kann doch über ihren *Sinn* kein Zweifel bestehen. — Die Bemerkung in runden Klammern ist offenbar ein Zusatz von Schweikart.]

Odenwalde geboren: seine Eltern waren Julius Ephraim Taurinus, gräfl. Erbach-Schönbergischer Hofrat, und Luise Juliane, geborene Schweikart. Nachdem er in Heidelberg, Gießen und Göttingen Rechtswissenschaften studiert hatte, lebte er von 1822 an in Köln ohne Amt und Beruf und fand Muße, sich mannigfachen wissenschaftlichen Interessen zu widmen. In Köln ist er auch hochbetagt am 13. Februar 1874 gestorben.

Veröffentlicht hat Taurinus nur wenig: 1825 erschien seine Theorie der Parallellinien, Köln am Rhein, 102 S. 8°. 4 Tafeln und im folgenden Jahre als Fortsetzung die Schrift: Geometriae prima elementa, Coloniae Agrippinae, 76 S. 8°. 2 Tafeln.

In dem Vorwort zu den Elementa hat Taurinus auf Seite IV—VI den Ursprung und Verlauf seiner Untersuchungen über die Parallelentheorie folgendermaßen geschildert:

„Der erste, der mich auf das neue System der Geometrie auf^(IV) merksam gemacht hat, war ein mit mir verwandter und eng befreundeter Mann, Schweikart, Professor der Rechte an der Universität zu Königsberg. Dieser schrieb mir vor vier Jahren ungefähr folgendermaßen: Durch emsiges Studium der Geometrie sei er zu der Überzeugung gelangt, dass es eine gewisse neue Geometrie gebe — er nannte sie Astralgeometrie —, bei der die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte sei, und er habe zu seiner Freude erfahren, dass der berühmte Gauß, dem seine Entdeckung mitgeteilt worden v war, schon lange mit demselben Gegenstande beschäftigt gewesen und darin noch weiter gekommen sei.

„Da jedoch unser Briefwechsel nicht fortgesetzt wurde, und da ich selbst damals keine Zeit zur Beschäftigung mit der Geometrie hatte, so kam es, dass ich meine Aufmerksamkeit diesem Gegenstande nicht eher wieder zuwendete, als bis mir die 1807 in Jena erschienene Schrift desselben Schweikart über die Parallellinien in die Hände fiel.

„Dieses Buch war mir deshalb höchst willkommen, weil ich daraus den Sinn und die Schwierigkeit des Problems gründlich kennen lernte, sowie auch alle die Methoden zum Beweise der Parallelentheorie, die bis dahin bekannt geworden waren.

„Bei der Ausarbeitung der von mir bereits herausgegebenen Theorie habe ich nämlich, wie ich gestehen muss, nur sehr wenige Bücher benutzt, hatte ich doch ausser der Ausgabe des Euklid von Lorenz*)

*) [Johann Friedrich Lorenz hatte 1773 das erste bis sechste sowie das elfte und zwölfte Buch der Elemente in deutscher Übersetzung herausgegeben; diese

kaum das eine oder andere Elementarbuch gelesen. Was ich daher aus Camerers Ausgabe der Elemente*) kennen lernte — einem Werke, das ich hochschätzte —, das war mir zum Teil neu, besonders, dass ich, ohne es zu wissen, auf Gedanken gekommen war, welche denen, die man dem Italiener Saccheri und unserm Landsmanne Lambert zuschreibt, sehr ähnlich sind. Ich für meine Person hatte diese Beweismethode von vorn herein für die beste, ja für die einzige gehalten, die es ermöglicht, die Schwierigkeit zu überwinden, und habe deshalb kein Bedenken getragen, einige meiner Beweise Gaußs selber mitzuteilen. Dieser hat mir sogleich aufs freundlichste geantwortet und einiges über den Gegenstand hinzugefügt, woraus ich freilich seine Ansicht über die Sache nicht vollständig habe erraten können. Möchte daher dieser ausgezeichnete Mann seine Gedanken über die ganze Frage, die bei einem solchen Geiste von unschätzbarem Werte sein müssen, baldigst veröffentlichen! Mit mir werden alle Geometer ihn immer von Neuem inständigst darum bitten.

„Zur Abfassung des vorliegenden Büchleins bin ich um so lieber geschritten, als meine Theorie, der ich nur ziemlich wenig Zeit gewidmet hatte, noch nicht öffentlich besprochen worden ist**), und ausserdem vieles enthält, was mir selbst bereits nicht mehr gefällt. Übrigens ging meine Absicht besonders dahin, die Analogien zwischen den verschiedenen Geometrien deutlicher hervortreten zu lassen. Ob mir das einigermaßen gelungen ist, das zu entscheiden überlasse ich dem Urteile erfahrener Männer, die, wie ich zuversichtlich hoffe, wenigstens meine eifrigen Bemühungen, die Wissenschaft der Geometrie zu fördern, anerkennen und mir gewogen sein werden.

„Köln am Rhein, den 1. December 1825.“

Dafs Taurinus zu seinen Untersuchungen über die Parallelen-theorie durch Schweikart angeregt worden ist, bestätigt einmal eine Stelle seiner Theorie der Parallellinien, die wir S. 261 mitteilen werden, noch deutlicher jedoch ein Brief, den Schweikart am 1. Oktober 1820 aus Marburg an Taurinus abgehen liefs, der damals in Göttingen Jura studierte. In diesem Briefe heifst es:

„Was die Mathematik betrifft, so überzeugte mich das, was Du

Euklid-Übersetzung ist wiederholt neu aufgelegt worden und war in Deutschland sehr verbreitet.]

*) [*Euclidis Elementa graece et latine*, ed. Camerer et Hauber. Bd. I. Berlin 1824. Der *Excursus ad Elementorum I. 29* enthält eine wertvolle Geschichte der Versuche, die fünfte Forderung zu beweisen; für das Folgende kommen besonders die Ausführungen auf S. 423—426 in Betracht.]

**) [Eine wohlwollende Besprechung der Parallelen-theorie von Taurinus ist im September 1827 in der *Allgemeinen Deutschen Litteraturzeitung* erschienen.]

schriebst, daß ich mich auch in diesem Punkte nicht in Dir geirrt hatte. —

„Durch meine vieljährigen Studien bin ich zuletzt zu der Einsicht gelangt, daß unsere Geometrie nur eine relative Wahrheit habe, und daß es eine höhere, welche ich die Astralgeometrie nenne, gebe, nach welcher z. B. die Winkel im Dreiecke kleiner als 2 rechte sind und immer mehr abnehmen, je mehr der Inhalt wächst, ja daß mit der Größe der Winkel auch der Inhalt und umgekehrt gegeben ist.

„Zu meiner Freude erfuhr ich, dass der berühmte Gauß schon lange auf demselben Wege und darauf schon weit vorgeschritten ist. In kurzer Zeit würde ich Dich in diese Ansicht einführen können und Deinem Erfindungstriebe ein weites Feld eröffnen.“

Es folgt eine Einladung an Taurinus, nach Königsberg zu kommen, die jedoch abgelehnt wurde.

Erst seit dem Jahre 1824 scheint Taurinus sich eingehender mit der Parallelen-theorie beschäftigt zu haben. Die Ergebnisse, zu denen er kam, hat er dann Schweikart und Gauß vorgelegt. Das Antwortschreiben Schweikarts vom 18. November 1824 ist schon auf Seite 245—246 mitgeteilt. Wir lassen nunmehr auch das Schreiben von Gauß folgen:

„Ewr. Wohlgeboren

gefälliges Schreiben vom 30 Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatz habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien [machen,] gar keine Spur von wahren geometrischen Geiste anzutreffen.

„Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als daß er unvollständig ist. Zwar läßt Ihre Darstellung des Beweises, daß die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks nicht grösser als 180° seyn kann in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein dies würde sich ergänzen lassen, und es leidet keinen Zweifel daß jene Unmöglichkeit sich auf das allerstrengste beweisen läßt. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2ⁿ. Theil, daß die Summe der Winkel nicht kleiner als 180° seyn kann; dies ist der eigentliche Knoten, die Klippe woran alles scheitert. Ich vermuthete, daß Sie sich noch nicht lange mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, daß jemand sich eben mit diesem 2ⁿ. Theil mehr beschäftigt haben könne als ich obgleich ich niemals etwas darüber bekannt gemacht habe. Die Annahme, daß die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180° , führt auf eine eigne von der unsrigen (Euclidi-

schen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so daß ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln läßt. Je grösser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euclidischen Geometrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Theil paradox, und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, daß sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man nur die Seiten gross genug nehmen darf, dennoch kann der Flächeninhalt eines Dreiecks, wie gross auch die Seiten genommen werden, nie eine bestimmte Grenze überschreiten, ja sie nicht einmahl erreichen. Alle meine Bemühungen einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euclidischen Geometrie zu finden sind fruchtlos gewesen, und das Einzige was unserm Verstande darin widersteht, ist daß es, wäre sie wahr, im Raum eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargrösse geben müßte. Aber mir deucht, wir wissen, trotz der Nichts Sagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raumes, als daß wir etwas uns unnatürlich vorkommendes mit Absolut Unmöglich verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euclidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen die im Bereich unsrer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so ließe sie sich a posteriori ausmitteln. Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäußert, daß die Euclidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maass a priori haben würden.

„Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden Mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, daß er das Vorstehende misverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Oeffentlichkeit führenkönnender Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmahl mehr Muse gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Untersuchungen bekannt machen.

„Mit Hochachtung verharre ich

Ewr Wohlgeboren
ergebenster Diener
CFGaufs.“

Göttingen den 8 November
1824.

Wir glauben nicht fehlzugehen, wenn wir annehmen, daß der Aufsatz, den Taurinus an Schweikart und Gauß gesandt hat, im Wesentlichen das enthielt, was die ersten 87 Seiten der Theorie der Parallellinien ausmacht. Diese Untersuchungen bezwecken, die Euklidische Geometrie als die einzig zulässige nachzuweisen. Daß es möglich sei, diesen Nachweis zu führen, sobald man nur das Axiom der geraden Linie voraussetzt, das heißt fordert, daß die Gerade durch zwei Punkte vollständig und eindeutig bestimmt ist, davon ist Taurinus fest überzeugt gewesen. Freilich zeigt die Nachschrift (S. 88—93) und noch mehr der Nachtrag (S. 95—102) zu seiner Theorie der Parallellinien, daß er schon 1825 nicht umhin konnte, die innere Konsequenz des „dritten Systems der Geometrie“ anzuerkennen, das heißt, des Systems, bei dem die Summe der Dreieckswinkel weniger als zwei Rechte beträgt. Aber er suchte die Euklidische Geometrie auch jetzt noch zu retten, indem er an der unendlichen Menge derartiger geometrischer Systeme Anstoß nahm, denn diese Systeme sind ja eben so zahlreich, wie die Systeme sphärischer Geometrien.

Auch die 1825 verfassten und 1826 veröffentlichten *Geometriae prima elementa* bedeuten in dieser Hinsicht keinen Fortschritt: Taurinus stellt sich auch hier noch durchaus auf den Boden der Euklidischen Geometrie. Dies ist um so wunderbarer, als er die Widerspruchlosigkeit des dritten Systems oder, wie er jetzt sagt, der logarithmisch-sphärischen Geometrie, klar erkannt und sogar die zugehörige Trigonometrie entwickelt und auf eine Reihe von elementaren Aufgaben mit Erfolg angewandt hatte. So tiefe Wurzeln hatte die zweitausendjährige Autorität Euklids!

Was die Einzelheiten betrifft, so verweisen wir auf die Auszüge aus den Schriften von Taurinus, die wir im Folgenden mitteilen werden. Wir haben uns dabei auf das Wichtigste beschränkt und bemerken noch, daß die Theorie der Parallellinien von 1825 in den Königlichen Bibliotheken zu Berlin und Dresden, sowie in den Universitätsbibliotheken zu Bonn und Jena vorhanden ist, während die *Geometriae prima elementa* nur im Besitze der Universitätsbibliothek zu Bonn sind. Die *Elementa* gehören zu den seltensten Schriften, welche die Bücherkunde aufzuweisen hat. Man findet sie in keinem der bis jetzt veröffentlichten Verzeichnisse von Schriften über die Parallelentheorie und die Grundlagen der Geometrie aufgeführt. Wir haben von dem Vorhandensein der *Elementa* erst durch Herrn Pastor A. Fürer Kunde erhalten; wie dieser mitteilt, hat Taurinus

einige wenige Exemplare der auf eigene Kosten gedruckten *Elementa* an Freunde verschenkt sowie mathematischen Autoritäten übersandt und hat später aus Unmut darüber, daß seine Bestrebungen keine Anerkennung fanden, den Rest der Auflage den Flammen überliefert.

Fassen wir schliesslich die Ergebnisse unsrer Nachforschungen zusammen, so können wir sagen, daß Schweikart und Taurinus ein bis jetzt nicht beachtetes, jedoch sehr beachtenswertes Mittelglied bilden zwischen Saccheri und Lambert einerseits und Gauß, Lobatschefskij und Bolyai andererseits.

Schweikarts Leistung besteht darin, daß er selbständig die Möglichkeit und die Berechtigung einer nichteuklidischen Geometrie klar erkannt und ausgesprochen hat, und in dieser Beziehung ist er mit Gauß gleichberechtigt. Da er jedoch in der Ausbildung seiner neuen Geometrie nicht über die Anfänge hinaus gekommen zu sein scheint, so können wir ihn nicht mit Gauß, Lobatschefskij und Bolyai in eine Linie stellen.

Taurinus konnte sich nicht zu der Freiheit der Auffassung erheben, durch die sich Gauß und Schweikart auszeichnen; er war ebenso wie Saccheri und Lambert von der unbedingten Wahrheit der Euklidischen Geometrie überzeugt. Aber während schon Saccheri den Kampf gegen die widerspenstige Hypothese des spitzen Winkels nur mühsam durchgeführt hatte, und Lambert diesen Kampf, wie wir annehmen dürfen, abgebrochen hat, so sah sich Taurinus genötigt, die Widerspruchsfreiheit des „dritten Systems“ anzuerkennen, versuchte aber die Alleinherrschaft der Euklidischen Geometrie dadurch zu retten, daß er sich auf die Vielheit der Geometrien des dritten Systems berief und diese für unzulässig erklärte. Das sind, um mit Lambert zu reden, „argumenta ab amore et invidia ducta“, die aus der Wissenschaft zu verbannen sind. Jedoch ist Taurinus vermöge seiner Erkenntnis von der Widerspruchsfreiheit der neuen Geometrie in der Ausbildung dieser Geometrie viel weiter vorgedrungen als Saccheri und Lambert und ist sogar durch einen genialen Gedanken, dem Lambert schon sehr nahe gewesen war, zu einer nichteuklidischen Trigonometrie gelangt, wie sie später Lobatschefskij und Bolyai auf systematischem Wege ausgebildet haben. Endlich war sich Taurinus, ebenso wie Lambert, darüber vollkommen klar, daß das geometrische System, das außer dem Euklidischen und dem logarithmisch-sphärischen noch möglich ist, auf der Kugel seine Verwirklichung findet, eine Einsicht, der man erst bei Riemann wieder begegnet.

Litteratur.

- Baltzer, R., *Elemente der Mathematik*. Bd. 2. Zweite Auflage. Leipzig 1867. S. III. S. 13—17. S. 146.
- Bartels, J. M. C., *Vorlesungen über mathematische Analysis*. Herausgegeben von F. G. W. Struve. Dorpat 1837. (Enthält eine Biographie von Bartels.)
- Battaglini, *Sulla Scienza dello Spazio assolutamente vera, ed indipendente della verità o della falsità dell' assioma XI di Euclide, giammai da potersi decidere a priori par Giovanni Bolyai* (versione dal latino). Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. VI. 1868.
- Frischauf, J., *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*. Leipzig 1872.
- Grunert, J., *Über den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen*. Grunerts Archiv. Teil 47. Greifswald 1867. S. 307—327.
- Halsted, Georg Bruce, *Geometrical Researches on the theory of parallels by Nicholas Lobatschewsky*. Austin [1891].
- Halsted, Georg Bruce, *Science Absolute of Space of Johann Bolyai*. Austin [1891.]
- Hoüel, *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles par J. N. Lobatschewsky, traduit de l'Allemand*. Suivie d'un extrait de la Correspondance de Gauss et Schumacher. Paris 1866. Zuerst veröffentlicht in den Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome IV. S. 83—128. Bordeaux 1866.
- [Hoüel] *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide* (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI. Par Jean Bolyai, Capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne. [Traduit du Latin par J. Hoüel]. Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai par M. Fr. Schmidt, Architecte à Temesvár. Paris 1868. Zuerst veröffentlicht in den Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome V. Bordeaux 1867.
- Justi, K. W., *Grundlage zu einer Hessischen Gelehrten-, Schriftsteller- und Künstlergeschichte vom Jahre 1806 bis zum Jahre 1830*. Marburg 1831. S. 622.
- Klein, F., *Nicht-Euklidische Geometrie*. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1889—90. Autographirt. Göttingen 1893.
- Lobatschewskij, N. J., *Polnoje sobranije sotschinenij po geometrii*. Bd. I, die russisch geschriebenen Arbeiten enthaltend, Kasan 1883. Bd. II, die deutsch und die französisch geschriebenen Arbeiten enthaltend, Kasan 1886. Bd. II führt auch den Titel: *Collection complète des œuvres géométriques de N. J. Lobatschewsky*.
- Poggendorff, Artikel *Schweikart* in dem Biographisch-litterarischen Handwörterbuch. Leipzig 1863. 4^o. Bd. 2. S. 876.
- Sartorius, W., von Waltershausen, *Gaußs zum Gedächtnis*. Leipzig 1856.

Schmidt, F., *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya*. Grunerts Archiv. Bd. 48. 1868. S. 217.

Die unter [Höfel] erwähnte *Notice Sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai* ist eine Übersetzung dieser Mittheilungen. Ferner giebt es eine italienische Übersetzung (A. Forti): *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya matematici ungheresi* in dem *Buletino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche et fisiche*. t. I. Rom 1868.

Scriba, H. E., *Biographisch-literärisches Lexicon der Schriftsteller des Großherzogthums Hessen im ersten Viertel des neunzehnten Jahrhunderts*. Erste Abtheilung. Darmstadt 1881. S. 382 (Schweikart), S. 403 (Taurinus).

Wassiljef, A., *Nicolai Ivánovich Lobachévsky*, Address pronounced October 22, 1893. Translated by G. B. Halsted. Austin, Texas. 1894. S. 9. Eine von F. Engel bearbeitete Übersetzung des russischen Originals wird im Laufe des Jahres 1895 bei B. G. Teubner in Leipzig erscheinen.

Winter, Artikel *Schweikart* in der *Allgemeinen Deutschen Biographie*. Bd. 33. Leipzig 1891. S. 388.

THEORIE
DER
PARALLELLINIEN

VON

F. A. TAURINUS.

Quid verum curo et rogo.
HORAT.

MIT DREI STEINTAFELN.

KOELN AM RHEIN.
GEDRUCKT UND ZU HABEN BEI JOHANN PETER BACHEM.

1 8 2 5.

Was die hier aufgestellte Theorie der Parallellinien betrifft, so (81) giebt gleich der 51. Satz zu einer äusserst interessanten Bemerkung Anlaß. In diesem Satze wird bewiesen, daß, unter der Voraussetzung, die Summe der Winkel eines Vierecks könne gröfser | sein, als vier 82 Rechte (oder, was auf eins hinausläuft, die Summe der Dreiecks- winkel gröfser, als zwei Rechte) alle Linien, die auf einer andern senkrecht stehen, sich in zwei Punkten in gleicher Entfernung zu beiden Seiten schneiden. Daraus ergibt sich der offenbarste Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie†), und ein solches geometrisches System kann nicht geradlinig sein: weiter aber erstreckt sich auch die Unmöglichkeit nicht: man gelangt vielmehr zu der klarsten Ueberzeugung, daß ein consequentes System der Art nichts anderes ist und nichts anderes sein kann, als *ein System von gröfsten Kreisen auf der Oberfläche einer Kugel* oder eine sphärische Geometrie.

Wenn es ein Mittel gäbe, sich zu überzeugen, daß die Linien, die man zeichnet oder sich denkt, alle gerade und in einer Ebene befindlich wären, so müßte nach unserer Einsicht sich ohne Mühe ergeben haben, daß die Euklidische Geometrie die einzige *ebene geradlinige* Geometrie sein kann und die Theorie der Parallellinien würde nie die mindeste Schwierigkeit gemacht haben. Allein es ist nicht möglich, bei allen denkbaren Constructionen die Anschauung der Ebene festzuhalten, und so kann es geschehen, daß man der geraden Linie Eigenschaften beilegt, die sie nicht hat, und der Widerspruch sich nicht sogleich an den Tag legt. Bogen eines und desselben Kreises haben alle Eigenschaften gerader Linien; sie sind sich ähnlich in allen ihren Theilen und bringen ähnliche Erscheinungen hervor, ob sie sich gleich nicht in jeder Lage decken. In der That wird man sich | leicht 83 überzeugen, daß zu der Möglichkeit eines consequenten geometrischen Systems nichts gehört, als ein System von gleichen Linien in einer zusammenhängenden ebenen oder gekrümmten Fläche.

Es wäre zu wünschen, daß in dem entgegengesetzten Falle, wenn die Winkel des Dreiecks zusammen weniger als zwei Rechte aus-

†) [S. 22: „*Besonderer Grundsatz der Geometrie.* Zwischen zwei Punkten ist nur *eine* gerade Linie möglich.“]

machen — und wenn dieß bei einem einzigen statt fände, so könnte es bei allen Dreiecken nicht anders sein — der Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie sich eben so leicht aufdecken liefse: allein dieß scheint mit weit größerer Schwierigkeit verbunden. Wir wollen indessen den Weg nachzeigen, der unserer Einsicht nach zu dem gewünschten Ziele führen könnte.

[Taurinus führt (S. 83—86) folgende Gründe an:

1) Es wäre alsdann die Folge, daß {gerade} „Linien theilweise zusammenfallen und dann auseinanderlaufen würden, was bei geraden Linien doch gewiß nicht der Fall sein kann“; es ist das genau die Widerlegung der Hypothese des spitzen Winkels, die man bei Saccheri (Seite 122) findet.

2) „Es giebt {in der Ebene} nur zwei Arten von Linien, die sich in allen ihren einzelnen Theilen gleich und ähnlich sind: die geraden Linien und Bogen eines und desselben Kreises: eine solche Aehnlichkeit der Linien wird aber zur Möglichkeit eines geometrischen Systems nothwendig vorausgesetzt.“ Nun können es keine Kreisbogen sein, „und sind sie gerade Linien, so folgt unwidersprechlich, daß das Euklidische System das einzige ebene und geradlinig, jedes andere aber uneben und krummlinig sei.“]

- (86) Eine tiefere Untersuchung über die wahre Natur des dritten Systems (in welchem die Winkel eines Dreiecks noch keine zwei Rechte zusammen ausmachen) liegt ausserhalb dem Zweck dieser Darstellung und wir gestehen, daß sie unsere Kräfte übersteigen möchte.

Daß in einem geradlinigen Viereck die Summe der Winkel größer als vier Rechte sei, ist absolut unmöglich: dagegen können in einem unebenen geradlinigen Vierecke sehr wohl drei rechte und ein spitzer Winkel sein, aber man überzeugt sich sogleich, daß ein solches unebenes Viereck nicht die Grundlage eines geometrischen Systems sein kann, daß dazu wenigstens eine regelmäßige zusammenhängende Fläche gehört.

Wir haben gegen die Annahme eines solchen Systems als geradlinig noch folgendes einzuwenden:

1. Es widerspricht aller Anschauung. Es ist wahr, ein solches System würde im Kleinen die nemlichen Erscheinungen darbieten können, wie das Euklidische: allein, wenn die Vorstellung des Raumes als die bloße Form der äußern Sinne betrachtet werden darf, so ist unstreitig das Euklidische System das wahre und es läßt sich nicht annehmen, daß eine beschränkte Erfahrung eine sinnliche Täuschung erzeugen könne.

2. Das Euklidische System ist die Gränze des ersten (wo die 87 Dreieckswinkel mehr als zwei Rechte | ausmachen): mit dieser Gränze

hört der Widerspruch, der sich mit dem Axiom der geraden Linie findet, auf.

3. Wäre das dritte System das wahre, so gäbe es überhaupt keine Euklidische Geometrie, da doch ihre Möglichkeit nicht geläugnet werden kann.

4. Es findet sich bei der Voraussetzung eines solchen Systems als geradlinig kein stetiger Uebergang: die Winkel eines Dreiecks könnten nur mehr oder weniger, als zwei Rechte ausmachen.

5. Dieses System würde ganz paradoxe Folgen haben, die allen Vorstellungen geradezu widersprechen: man wird geneigt, dem Raum Eigenschaften beizulegen, die er nicht haben kann.

6. Alle vollkommene Aehnlichkeit der Flächen und Körper fällt weg, und doch scheint dieser Begriff in der Anschauung gegründet und ein wahres Postulat zu sein.

7. Das Euklidische System ist auf jeden Fall das vollkommenste und schon deshalb spricht die höchste Wahrscheinlichkeit dafür, daß es auch das wahre sei.

8. Die innere Consequenz des dritten Systems ist kein Grund, es als ein geradliniges zu betrachten: es findet sich in demselben nur bis jetzt kein Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie, wie in dem andern†).

Was das dritte System nun eigentlich sei, ob etwa ein System von Linien auf der Oberfläche einer Kugel, die durch ebene Schnitte entstehen — ob es Linien enthalte, die gleich sein können, ohne dabei allemal ähnlich zu sein und sich zu | decken — oder ob es vielleicht 88 auf etwas Unmögliches führe††), lassen wir dahin gestellt sein und sprechen zum Schlusse unsere Ueberzeugung dahin aus, daß es ein solches System allerdings gebe; daß wir aber zweifeln, ob es eine *geradlinige* und eine *ebene* Geometrie sein werde.

[Aus der Nachschrift teilen wir folgende Stelle mit:]

Es läßt sich sehr leicht zeigen, daß ein geometrisches System, 89 in welchem weniger als zwei Rechte im Dreieck enthalten sind, an sich nicht bestimmt ist, sondern eine besondere Bestimmungsgröße oder Constante erfordert. Hieraus ergibt sich sogleich, daß es *a priori* gar keine andere Geometrie, als die | Euklidische für uns 90

†) [Diesen Einwand hat Taurinus später fallen lassen; vergleiche S. 96 seiner Theorie der Parallellinien, hier S. 261 unten.]

††) [Man erinnere sich an Lamberts imaginäre Kugel (S. 145 dieses Werkes.)]

giebt, weil eine solche Constante ganz willkürlich angenommen werden kann†).

Man denke sich im Raum drei feste Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, durch Linien verbunden. Einer jeden willkürlichen Annahme der Winkelsumme in dem so entstandenen Dreieck entspricht auch eine besondere Natur der drei Linien; denn die Winkel hängen durchaus von der Natur der Linien ab und die Constante, die dem geometrischen System zum Grunde liegt, hat unmittelbar nur auf die Beschaffenheit der Linien Einfluß. Die Linien des Dreiecks sind also, so lange es noch einer Constante bedarf, durch die zwei Punkte, zwischen welchen sie liegen, nicht bestimmt; daher sind sie, wenn sie auch gerade Linien sein könnten, doch nicht von der Art, wie diejenige, die die Grundlage unserer Geometrie ausmacht: denn diese soll durch zwei Punkte vollkommen bestimmt sein. Nun bedarf es nur in dem Falle keiner Constante, wenn die Dreieckswinkel zwei Rechte ausmachen; also kann auch nur in diesem Falle die gerade Linie schon durch zwei Punkte bestimmt sein oder die Euklidische Geometrie entspricht allein unserm Axiom von der geraden Linie.

In derselben ist die Summe der Winkel von der Größe der Seiten unabhängig und in allen Dreiecken gleich groß.

Darf man voraussetzen, daß ein consequentes System, in welchem weniger als zwei Rechte im Dreieck enthalten sind, nur *einer* Constante bedürfe, wie die sphärische Geometrie, so könnte man daraus
91 schließen, daß es nur ein System von Bogen eines Kreises sein könne: denn durch eine Constante kann außer den zwei Punkten, zwischen welchen eine Linie liegt, nur noch ein dritter Punkt bestimmt werden: drei Punkte aber bestimmen einen Kreis. Allein eine solche Voraussetzung scheint sich nicht rechtfertigen zu lassen††).

In der sphärischen Geometrie hat man

$$C = f\left(A, B, \frac{m}{p r}\right),$$

wo A, B, C die drei Tangenten-Winkel, m die von den Winkeln A, B eingeschlossene Seite, p die Ludolphische Zahl, r den Halbmesser bezeichnet. Da man für ein geometrisches System, in welchem weniger als zwei Rechte im Dreieck enthalten sind, die Größen A, B, m, r die nemlichen sein lassen kann, so wären für C bei gleichen Be-

†) [Dies wird von Taurinus auf S. 101, hier S. 265 genauer ausgeführt.]

††) [In der That wird nach Ausschluss der Hypothese des stumpfen Winkels, wie W. Bolyai gezeigt hat, durch das Axiom: *Drei Punkte bestimmen einen Kreis* die Euklidische Geometrie bedingt.]

stimmungsgrößen zweierlei Werthe möglich, welches doch dem widerspricht, daß C eine determinirte Function von A, B, m, r sein soll.

Die Idee einer Geometrie, in welcher die Summe der Dreieckswinkel kleiner als zwei Rechte wäre, ist mir schon vor vier Jahren mitgetheilt worden;*) ich habe mich aber nicht damit befreunden können und kann es jetzt noch viel weniger. Wenn es ein solches System gäbe, so wäre unter den unzählig vielen möglichen nur eines das wahre: allein es ist mir viel wahrscheinlicher, daß alle diese Systeme zugleich existiren, so wie es unzählig verschiedene sphärische Geometrien giebt, weil man sich Kugeln von unzählig verschiedenen Halbmessern denken kann.

[Aus dem Nachtrag:]

Der Satz, bei welchem die Eigenschaft der geraden Linie [durch(95) zwei Punkte eindeutig bestimmt zu sein] am meisten in Betracht kommt, dessen Beweis daher der ganzen Geometrie die eigentliche Gestalt giebt, ist der Satz von der Summe der in einer ebenen geradlinigen Figur enthaltenen Winkel. Die gründlichste Methode, den Beweis zu führen, ist ohne Widerrede die, wenn man die drei möglichen, ganz verschiedenen, geometrischen Systeme hinreichend entwickelt, um die Uebereinstimmung oder den Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie aufzudecken. Eine Geometrie, in welcher mehr als zwei Rechte im Dreieck enthalten sind, führt auf einen offenbaren Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie; denn in jedem System der Art würden die geraden Linien sich in zwei Punkten schneiden, ohne zusammenzufallen.

In dem umgekehrten Falle scheint sich auf den ersten Blick eine große Schwierigkeit zu erheben: allein die Wahrheit liegt meiner Einsicht nach doch | bei weitem nicht so tief, als man zu glauben ge- 96 neigt sein möchte und ich mich anfangs selbst überredet habe. Jede Geometrie, in welcher die Winkelsumme im Dreieck kleiner, als zwei Rechte, angenommen wird, enthält *in sich selbst* — dem Begriff nach — keinen Widerspruch mit dem Axiom der geraden Linie und ich nehme meine Vermuthung, daß ein solcher sich möchte auffinden lassen, ganz zurück. Es ist dieß eine nothwendige Folge des Axioms, daß zwischen zwei Punkten nur *eine* gerade Linie möglich sei, welches eine solche Geometrie gewissermaßen nicht ausschließt. Der Widerspruch muß darin gesucht werden, daß es nicht ein, sondern eine

*) Von meinem Oheim Prof. S[chweikart] in K[önigsberg], damals noch in M[arburg]. [Brief vom 1. October 1820, Seite 248 f. dieses Buches.]

eck, daher auch $ihck$ ein Rechteck oder $fhg = R$, also auch $fhdg$ ein Rechteck, dessen Seiten parallel sind und es ist einleuchtend, daß dieß Verhältniß allgemein statt finden würde, gegen die Voraussetzung.

Im letzten Fall würden die Lothe innerhalb des $\triangle ace$, z. B. in l sich schneiden, es wäre (23.) $alc > amc$, $amc > aec$, folglich $alc > aec > R$ und in der Figur $aldc$ wären bei a, d, c rechte Winkel, dagegen $alc > R$, folglich (51.) alle Linien, die auf einer andern senkrecht stehen, convergirend und nicht gerade, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Wenn von einem Punkte aus nach einer Linie andere Linien gezogen werden, so können die Winkel, die die letztern mit der erstern machen, kleiner als jede angebliche Gröfse werden.

Denn es sei a (Fig. III.) ein Punkt, aus welchem nach der bc Linien ad, ae gezogen sind. In dem $\triangle ade$ sind die Winkel zusammen $< 2R$. Mache (7.) $ef = ae$, ziehe af , so ist (8.) $eaf = afe$ und $(eaf + afe + aef) < 2R$. Aber (17.) $ae + aed = 2R$, daher $acd > (eaf + afe)$ und $afe < \frac{1}{2}aed$. Da man von der bc Stücke, so groß wie man nur will und ohne Ende nehmen kann, weil sich für ihre Verlängerung keine Gränze absehen läßt, so muß man (wie die Arithmetik lehrt) einmal auf einen Winkel kommen können, der kleiner ist, als jeder angebliche.

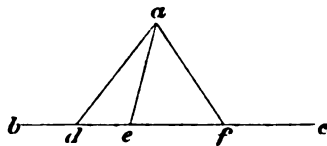


Fig. III.

3. Wenn zwei Linien von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, so giebt es eine andere, die auf den beiden ersten lothrecht steht, welche sich alsdann nicht schneiden können.

Denn es seien ab, cd (Fig. IV.) zwei Linien, die von der ef so geschnitten werden, daß $bef = efc$. Halbire (13.) ef in g , fälle (22.) gh, gi . In den $\triangle\triangle egi, ghf$ ist angenommen $M[alsen] ieg = gfh$, d[urch] C[onstruction] $eg = gf$, $eig = ghf$, daher (33.) $\triangle egi = \triangle ghf$: $egi = hgf$. Aber (17.) $egi + igf = 2R$, daher auch $igf + fgh = 2R$, folglich (20.) ig, gh in gerader Linie, die sowohl auf ab als cd senkrecht steht: daher (48.) ab, cd zu beiden Seiten von ih divergirend.

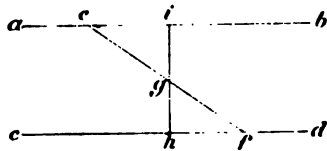


Fig. IV.

4. Zwei Linien schneiden sich oder eine dritte kann auf beiden senkrecht stehn.

Es seien ab, cd (Fig. V.) zwei Linien, die sich nicht schneiden, ef ein Loth auf cd und $bef < R$: ziehe eg . Wäre $beg > egf$, so

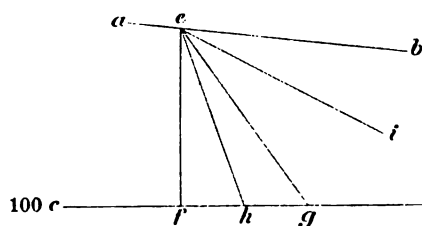


Fig. V.

wird es immer eine Linie eh von der Lage geben, daß $beh = ehf$, alsdann giebt es nach dem vorigen Beweis auch eine Linie, die auf ab und cd senkrecht steht. Wäre $beg < egf$, so giebt es | eine Lage ei , in welcher die von e aus gezogenen Linien die cd nicht mehr treffen werden.

Allein die von e nach der cd gezogenen Linien können, nach dem obigen Beweis, mit derselben Winkel bilden, für deren Abnahme es keine Gränze giebt, während der Winkel bei immer eine angebliche GröÙe behalten wird: daher giebt es gewiß eine Linie zwischen e und der cd , die die Lage hat, daß sie mit ab, cd gleiche Wechselwinkel bildet, folglich auch eine andere, die auf beiden lothrecht steht.

5. Nun seien ab, ac (Fig. VI.) zwei Linien, die unter dem spitzen Winkel bac zusammentreffen. Errichte (16.) in dem beliebigen Punkt e

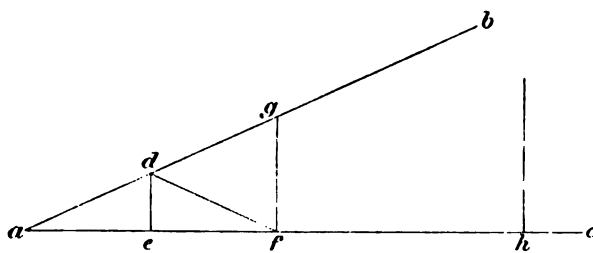


Fig. VI.

das Loth ed , so sind in dem $\triangle ade$ weniger, als zwei Rechte. Mache (7.) $ef = ae$, ziehe df , so ist (6.) $\triangle def = \triangle dae$. Errichte in f das Loth fg . Da in dem $\triangle gdf$ höchstens zwei

Rechte sein können, so sind, wenn D den Unterschied zwischen zwei Rechten und den im $\triangle dae$ enthaltenen Winkeln bezeichnet, in den $\triangle dae, def, gdf$ höchstens $6R - 2D$, und, wenn $2R$ bei d , $2R$ bei e abgezogen werden, in $\triangle gaf$ höchstens $2R - 2D$. Aber $\triangle gaf$ hat mit $\triangle dae$ den Winkel bac und einen Rechten gleich; folglich ist es nur der Winkel agf , der um den Unterschied D abgenommen hat. Wird dem $\triangle gaf$ ein gleiches verzeichnet, indem man $fh = af$ macht, so ist es einleuchtend, daß das in h aufgerichtete Loth, bis zur ab verlängert, mit dieser einen Winkel bilden würde, der wenigstens um den doppelten Unterschied D kleiner wäre, als

agf, und da man die Construction gleicher Dreiecke ohne Ende fortsetzen kann, weil es für die Verlängerung der *ac* keine Gränze giebt, so wird zuletzt die Summe der Winkel, wie gering auch der Unterschied *D* gedacht werden mag, so klein als man will und $= 0$ 101 werden können. Diefs ist aber, da allen Dreiecken der Winkel *bac* und der rechte Winkel, den das auf *ac* aufgerichtete Loth bildet, gemein ist, gar nicht möglich. Daher bleibt nichts übrig, als anzunehmen, dafs es auf der *ac* einen Punct 'gebe, wo das aufgerichtete Loth die *ab* nicht mehr trifft.

6. Schliessen die geraden *ba*, *ac* (Fig. VII.) einen rechten Winkel *bac* ein, der durch die *ad* in zwei gleiche Theile getheilt wird, so giebt es nach den vorigen Beweisen immer eine auf *ad* senkrechte Linie *feg*, welche die Asymptote sowohl von *ab* als *ac*, oder die Gränze ist, welche *ab*, *ac* nie erreichen können, obgleich sie sich derselben ohne

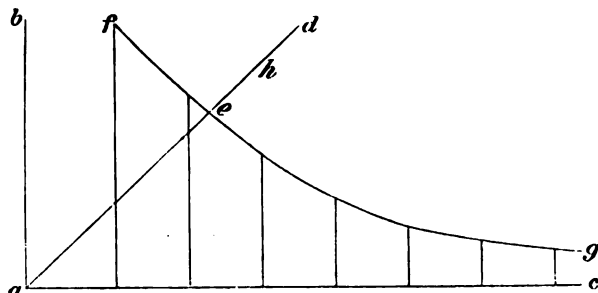


Fig. VII.

Ende bis zu einer unangeblichen Entfernung nähern. Man wird aber auch *eg* als die letzte Linie betrachten können, die durch den Punct *e* geht, ohne die *ac* zu treffen: alsdann giebt es nach dem obigen Beweis eine Linie, die auf *eg* und *ac* zugleich senkrecht steht: ebenso darf *ef* für die letzte Linie genommen werden, die durch den Punct *e* gehend, die *ab* noch schneidet, folglich mit derselben einen Winkel von nicht mehr angeblicher Grösse bildet. Werden daher von der *feg* Lothe auf die *ac* herabgefällt, so werden sie mit der erstern jeden möglichen Winkel, von einem rechten durch alle Zwischenstufen hindurch bis zum kleinsten bilden können, die Figur *bacgef* stellt also die Asymptoten für jeden Winkel, unter welchem Linien zusammentreffen können, dar.

Die Linie *ae* kann die Bestimmungsgrösse (Parameter, Axe, Potenz) des geometrischen Systems genannt werden und es erhellt von selbst, dafs man sie willkührlich annehmen kann.

Wäre *ae* als Grundlinie eines Dreiecks und $gea = R$, $eac = \frac{1}{2} R$ 102 gegeben, so würde die Summe der Winkel des $\triangle age$, da der Winkel bei *g* verschwindet, $= \frac{3}{2} R$ sein: aber für den Parameter *ah* würde die Summe, weil das in *l* errichtete Loth die *ac* noch trafe und einen angeblichen Winkel mit derselben machte, gröfser sein.

Da aber (31.) ein Dreieck durch die Grundlinie und die anliegenden Winkel bestimmt ist, so könnte, wenn ein geometrisches System, das weniger als zwei Rechte im Dreiecke enthält, das geradlinig sein sollte, von allen möglichen nur eines das wahre sein, es müßte irgend eine absolute Linie demselben zu Grunde liegen und von dieser würde dann, wenn drei Punkte als Eckpunkte eines Dreiecks gegeben wären, die Summe der Winkel desselben, also auch die Gestalt der Linien abhängen. Aber es läßt sich gar kein Grund einsehen, dem einen System vor allen andern eine ausschließliche Gültigkeit beizulegen, man muß vielmehr die gleichzeitige Möglichkeit aller Systeme annehmen und es wären also, wenn man sie als geradlinig betrachten wollte, zwischen zwei Punkten unendlich viele gerade Linien denkbar.

Aber zwischen zwei Punkten soll es überhaupt nur eine einzige gerade Linie geben: daher können die Linien einer Geometrie, in welcher alle Dreiecke weniger, als zwei Rechte enthalten, nicht gerade Linien sein.

Anmerkung. Wenn man das Axiom der geraden Linie so ausdrücken will, daß die gerade Linie durch zwei Punkte *absolut* bestimmt sei, so kann keine Geometrie, in welcher weniger als zwei Rechte im Dreiecke sind, geradlinig sein, weil die Linien derselben außer den zwei Punkten, zwischen welchen sie liegen, ihrer Gestalt nach auch noch von dem Parameter des geometrischen Systems abhängen würden. Man sieht daraus, daß es auf keinen Fall nöthig ist, wie manche glauben, entweder das Euklidische 11. Axiom beizubehalten, oder ein anderes an dessen Stelle zu setzen.

GEOMETRIAE

PRIMA ELEMENTA.

RECENSUIT

ET NOVAS OBSERVATIONES ADJECIT

FRANC. ADOLPH. TAURINUS.

CUM TABULA LITHOGRAPHICA.

COLONIAE AGRIPPINAE.

TYPIS J. P. BACHEMIL.

MDCCCXXVI.

Es bleibt mir noch übrig, einiges Wenige über die neue Geo- (56)
metrie hinzuzufügen, die uns bei Gelegenheit dieses Satzes *) ent-
gegentritt.

Der Flächeninhalt der Dreiecke wird, ebenso wie in der sphäri-
schen Geometrie, durch die Winkelsumme bestimmt. Hat man nämlich
ein Dreieck, das eine beliebige Winkelsumme besitzt, und zerlegt es
durch im Innern gezogene Linien in lauter Dreiecke, so wird die
Summe der Winkel aller so entstehenden Dreiecke, vermindert um so
viel mal zwei Rechte, als die Anzahl dieser Dreiecke weniger eins
beträgt, gleich der Winkelsumme des ganzen Dreiecks sein. Haben
daher zwei Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so werden sich entweder
beide in eine gleiche Anzahl gleicher Dreiecke zerlegen lassen, und
es wird auch die Winkelsumme in beiden gleich sein, oder, wenn das 57
nicht angeht, wird man doch in beiden Dreiecken eine gleiche Anzahl
gleicher Dreiecke annehmen können, und die überschießenden Flächen-
räume werden so klein sein, daß man sie vernachlässigen darf.
Ebenso wird jedes sehr kleine Dreieck fast genau zwei Rechte ent-
halten, da es ja eine um so größere Winkelsumme hat, je kleiner es
ist. Mithin wird man behaupten dürfen, daß gleiche Dreiecke gleiche
Winkelsumme haben, und daß sich die Inhalte der Dreiecke so ver-
halten wie die Unterschiede zwischen zwei Rechten und den jeweiligen
Winkelsummen der einzelnen Dreiecke.

Hieraus folgt eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt des
Dreiecks. Es seien a und A die Flächeninhalte zweier Dreiecke, d
und D die Unterschiede ihrer Winkelsummen von zwei Rechten,
dann ist:

$$a : A = d : D$$

und daher:

$$a = \frac{d}{D} A.$$

*) [Gemeint ist der Satz 24: Die drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks sind
zusammen gleich zwei Rechten, den Taurinus S. 30—36 zu beweisen versucht
hatte. Die Seiten 53 bis 68 enthalten Bemerkungen zu Satz 24, von denen wir
hier einen Teil in deutscher Übersetzung wiedergeben.]

Aus dieser Formel lassen sich verschiedene Folgerungen herleiten. Zum Beispiel müssen die Unterschiede entweder beide positiv oder beide negativ sein, damit $\frac{d}{D}$ positiv wird, denn sonst hat die Proportion oder die Gleichung gar keinen Sinn. Ist aber bei ungleichen Oberflächen beide Male der Unterschied gleich Null, so wird $\frac{d}{D}$ gleich $\frac{0}{0}$, das heisst, a ist unbestimmt, was in der ebenen Geometrie eintritt. Sind dagegen beide Unterschiede negativ, so kann keiner von ihnen grösser als zwei Rechte werden, und es ist somit das Dreieck, dessen Winkelsumme gleich Null ist, die Grenze aller Dreiecke oder das grösste von allen. Demnach kann die Fläche des Dreiecks ein bestimmtes Maass des Inhaltes nicht überschreiten, und dasselbe gilt auch für jede geradlinige Figur, die man als aus solchen Dreiecken zusammengesetzt anzusehen hat.

- 58 Dafs es übrigens unmöglich ist, der Geometrie, bei der im Dreieck weniger als zwei Rechte sind, einen Widerspruch mit dem Axiome der geraden Linie nachzuweisen, geht daraus hervor, dafs man, um zu einem solchen Nachweise zu gelangen, erhärten müßte, dafs zwei gerade Linien einander in zwei Punkten schneiden, ohne zusammenzufallen; so oft nämlich zwei Linien einander [in dieser Weise] schneiden, hat, wie wir gezeigt haben, jedes Dreieck mehr als zwei Rechte. Mithin besteht, soweit es auf die Begründung der Parallelen-theorie ankommt, zwischen der sphärischen Geometrie und dieser Geometrie der Unterschied, dafs die erste dem Axiom der geraden Linie durchaus widerstreitet, während hingegen bei der zweiten der Widerspruch nur eine Folge der Vielheit der [möglichen] Systeme ist*).

- (64) Dies war bereits gedruckt, und es blieb mir nur noch übrig, meine Ansicht über das wahre Wesen dieser Geometrie vorzubringen, da gelangte ich endlich zu der Gewissheit, dafs sich diese meine Ansicht wirklich beweisen läßt. Von Anfang an hatte ich nämlich die Vermutung gehegt, dafs eine solche Geometrie gewisser-maassen die Umkehrung der sphärischen sei, dafs sie Logarithmen mit sich bringe und sich aus der allgemeinen Formel der sphärischen
65 Geometrie herleiten lasse, und ich würde mich darüber wundern, dafs ich eine Sache, die so klar ist und die für jedermann auf der Hand

*) [Es folgt ein Versuch, für die *neue Geometrie* eine *Trigonometrie* aufzubauen, der jedoch als mißglückt anzusehen ist.]

liegt, nicht früher durchschaut habe und so große Weitläufigkeiten nötig hatte, wenn ich mich nicht erinnerte, daß gerade Dinge, die ganz selbstverständlich scheinen, oft sogar bedeutenden Männern lange verborgen geblieben sind. Übrigens habe ich geglaubt, an alle dem, was vorher aus analytischen Formeln hergeleitet wurde, nichts ändern zu sollen, da sich das nur auf das Verständnis jener Geometrie bezieht und bei bloßer Änderung der Formeln vollständig gültig bleibt.

Betrachten wir also die allgemeine geometrische Formel*)

$$A = \arccos \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

oder auch die folgende einfachere für das gleichseitige Dreieck:

$$A = \arccos \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Wird hierin $\alpha = 0$ gesetzt, so ist der ganze Cosinus gleich $\frac{1}{2}$, und daher der Winkel A gleich $\frac{\pi}{3}$, denn die drei Winkel können [hier] nicht kleiner als zwei Rechte sein. Aber α kann nicht größer als $\frac{2\pi}{3}$ sein, denn wäre es ein größerer Bogen, so würde der Cosinus des Winkels A kleiner als -1 , das heißt unmöglich.

Man setze jedoch**):

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = y.$$

Dann ist

$$d\alpha = \frac{dy}{\sqrt{1 - 4y + 5y^2 - 2y^3}} \left[= \frac{dy}{(1-y)\sqrt{1-2y}} \right]$$

und

$$d\alpha \cdot \arccos \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{dy \cdot \arccos y}{\sqrt{1 - 4y + 5y^2 - 2y^3}}.$$

Diese Differentialfunktion ist integrabel, auch wenn y kleiner als -1 ist, denn sie geht in die folgende über:

$$\frac{dy \cdot \log \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}}}{2\sqrt{2y^3 - 5y^2 + 4y - 1}}.$$

Wenn dagegen y größer als $\frac{1}{2}$ ist, dann scheint die Formel weder Kreisbogen noch Logarithmen auszudrücken.

Setzt man jedoch

$$\cos \alpha = 1 + x,$$

*) [A bedeutet einen Winkel, und α, β, γ sind den Seiten des Dreiecks proportional.]

**) [Der Zweck der folgenden Differentiation ist uns nicht verständlich.]

wobei ich mir α positiv denke, so wird der Winkel A kleiner als $\frac{\pi}{3}$, und zwar um so kleiner, je grösser $\cos \alpha$ ist. Man setze daher an Stelle des Bogens α den imaginären Bogen $\alpha\sqrt{-1}$, dessen Cosinus grösser als die Einheit ist, so hat man nach einer den Analytikern wohl bekannten Formel:

$$\alpha\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos(\alpha\sqrt{-1}) + \sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1}}{\cos(\alpha\sqrt{-1}) - \sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1}}$$

oder:

$$\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{\cos(\alpha\sqrt{-1}) - \sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1}}{\cos(\alpha\sqrt{-1}) + \sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1}},$$

und diese Formel*) enthält nichts Unmögliches, da man für den Cosinus des imaginären Bogens $\alpha\sqrt{-1}$ jede Zahl einsetzen darf, die grösser als die Einheit ist.

Aus dieser Gleichung geht hervor:

$$\cos(\alpha\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}),$$

$$\sin(\alpha\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (e^{\alpha} - e^{-\alpha})\sqrt{-1},$$

und da sich diese Formeln von den in der Geometrie schon längst gebräuchlichen nur dadurch unterscheiden, dass hier α an die Stelle des Exponenten $\alpha\sqrt{-1}$ gesetzt ist, so gilt offenbar Alles, was man von den trigonometrischen Linien zu beweisen pflegt, eben so gut auch für die hier auftretenden imaginären. Zum Beispiel wird sein:

$$\sin(\varphi\sqrt{-1} + \psi\sqrt{-1}) = \sin(\varphi\sqrt{-1}) \cos(\psi\sqrt{-1}) + \sin(\psi\sqrt{-1}) \cos(\varphi\sqrt{-1}),$$

und ebenso bei allen übrigen Formeln.

Mithin wird die Formel**):

$$A = \arccos \frac{\cos(\alpha\sqrt{-1}) - \cos(\beta\sqrt{-1}) \cos(\gamma\sqrt{-1})}{\sin(\beta\sqrt{-1}) \cdot \sin(\gamma\sqrt{-1})}$$

oder:

$$A = \arccos \frac{\cos(\beta\sqrt{-1}) \cos(\gamma\sqrt{-1}) - \cos(\alpha\sqrt{-1})}{\sqrt{\cos^2(\beta\sqrt{-1}) - 1} \sqrt{\cos^2(\gamma\sqrt{-1}) - 1}}$$

*) [Sie lässt sich auch in der Form

$$\alpha = \log (\cos(\alpha\sqrt{-1}) - \sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1})$$

schreiben, die im Folgenden ebenfalls benutzt wird.]

**) [Hierzu heisst es im Druckfehlerverzeichnis Seite 76:

„Es hätte bemerkt werden sollen, dass, wenn die Cosinus negativ und kleiner als -1 werden, die allgemeine Formel S. 65 umgekehrt wird und die Seite durch die Winkel, jedoch negativ, ausdrückt. Dies scheint den Sinn zu haben, dass die Winkel, die hier grösser als 120° sind, nicht die Winkel des Dreiecks, sondern ihre Ergänzungen zu zwei Rechten bedeuten.“]

eine Geometrie bestimmen, bei der alle Dreiecke weniger als zwei 67 Rechte enthalten, wenn nämlich für den imaginären Cosinus oder besser den Cosinus des imaginären Bogens irgend eine Zahl gesetzt wird, die gröfser als die Einheit ist. Dabei müssen jedoch von den Zahlen α , β , γ je zwei zusammen gröfser als die dritte sein: ich denke mir nämlich, dafs diese Zahlen die durch eine gewisse konstante Linie R getheilten Seiten eines Dreiecks sind*). Gleichzeitig erhellt, dafs es unzählig viele Systeme giebt, da ja, wenn die Linien a , b , c , die Seiten des Dreiecks, gegeben sind, die Zahlen α , β , γ gröfser oder kleiner ausfallen, je nachdem man R kleiner oder gröfser annimmt.

Da ferner bei einem sphärischen Dreieck die Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten gleich:

$$2 \text{ arc cos } \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta \cdot \cos \frac{1}{2} \gamma}$$

ist: so wird in der logarithmisch-sphärischen Geometrie der Unterschied — der von zwei Rechten abzuziehen ist — gleich:

$$2 \text{ arc cos } \frac{2 + e^{\alpha} + e^{-\alpha} + e^{\beta} + e^{-\beta} + e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{(e^{1/2\alpha} + e^{-1/2\alpha})(e^{1/2\beta} + e^{-1/2\beta})(e^{1/2\gamma} + e^{-1/2\gamma})}.$$

Setzt man also α , β , γ gleich $\frac{1}{\infty}$, so wird der Unterschied gleich Null sein, denn in einem sehr kleinen Dreieck ist die Winkelsumme gleich π . Sind dagegen α , β , γ gleich ∞ , so ist der Unterschied gleich π , denn die Winkelsumme des grössten Dreiecks ist gleich Null. Wenn endlich α und β gleich ∞ gesetzt werden, γ aber sehr klein ist, so wird der Unterschied, wie es sein mufs, gleich Null. Auf diese Weise leitet man leicht noch vieles Andre her.

Läfst man diese Geometrie zu, so zeigt sich bei der Winkelsumme des Dreiecks eben die ununterbrochene Stetigkeit, welche die Wissenschaft der Geometrie zu erfordern scheint. Geht man nämlich von dem grössten Dreieck der logarithmisch-sphärischen Geometrie aus, so ist diese Summe gleich Null, und je kleiner der Inhalt des Dreiecks wird, um so mehr wächst die Summe, bis sie den asymptotischen Wert, nämlich zwei Rechte, erreicht. Wenn andererseits die Summe volle zwei Rechte beträgt, so entsteht die ebene Geometrie, 68 bei der alle Dreiecke zwei Rechte enthalten. Diese liegt in der Mitte zwischen den sphärischen Geometrien. Wenn in dem Dreieck mehr als zwei Rechte sind, so nimmt die Summe mit wachsendem Flächeninhalte zu, bis sie gleich 3π wird, und die Seiten in eine Linie, näm-

*) [Die Konstante R nennt *Taurinus* später die *Basis* des Systems.]

lich in einen [größten] Kreis zusammenfallen; dies tritt ein, wenn der Inhalt gleich der halben Kugeloberfläche ist.

Auf einen Punkt muß ich noch zum Schlusse die Geometer aufmerksam machen: sie dürfen bei dem Beweise der Parallelentheorie fernerhin keine Schwierigkeit mehr suchen, denn eine solche ist meiner Ansicht nach ganz und gar nicht vorhanden. Eine Linie sehen wir nämlich als gerade an, wenn sie durch zwei Punkte bestimmt ist, und zum Beweise des elften Euklidischen Axioms ist außer dieser Erklärung nichts erforderlich; die Beweise, die ich in der von mir früher herausgegebenen Theorie veröffentlicht habe (einige unwesentliche Punkte sind darin freilich noch zu verbessern), genügen mir auch heute noch.

Die Untersuchung der Frage, was nun das wahre Wesen der logarithmisch-sphärischen Geometrie ist, ob sie etwas Möglichen enthält oder ob sie nur imaginär ist, wäre zwar für die höchste Gelehrsamkeit eine würdige Aufgabe, überschreitet jedoch sicher die Grenzen der Elemente.

Anhang

69

mit den Lösungen für die bemerkenswertesten Aufgaben der logarithmisch-sphärischen Geometrie.

1. Gegeben ist das größte Dreieck ABC (Fig. I.); zu finden ist das von [einem Punkte] der einen Seite AB auf die andre BC gefällte Lot, zum Beispiel DE , wenn der Winkel EDB gegeben ist.

In dem Dreieck DEB ist der Winkel DEB oder $\alpha^*)$ gleich R [90°], gegeben ist der Winkel EDB oder β , und DBC oder γ ist gleich Null, denn BC ist Asymptote der Linie AB . Wird noch DE mit c und die Basis des geometrischen Systems mit R bezeichnet, und

$$\frac{c}{R\sqrt{-1}} = c$$

gesetzt, so ist nach der Formel:

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

[bei dem Dreieck DEB]:

$$\cos c = \frac{1}{\sin \beta}.$$

*) [Man beachte, daß hier und im Folgenden abweichend von der früheren Bezeichnung α, β, γ für die Winkel, A, B, C für die Seiten des Dreiecks gebraucht werden]

In gleicher Weise ist jede Linie, zum Beispiel HJ (Fig. I.), welche die beiden Seiten $[AC$ und $BC]$ des grössten Dreiecks unter den Winkeln $CHJ = \alpha$ und $CJH = \beta$ schneidet, gleich:

$$R \log \cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \beta.$$

Diese Formel ist für den Beweis des elften Euklidischen Axioms von Wichtigkeit. Es mögen nämlich zwei Linien mit einer dritten sie schneidenden A auf derselben Seite der letzteren die Winkel α und β bilden. Nun hat man, wenn $\alpha + \beta = 180^\circ$ ist:

$$\log \cot \frac{1}{2} \alpha \cdot \cot \frac{1}{2} \beta = 0,$$

sollten also die Linien einander schneiden, so müßte $A = 0$ sein, und zwar bei beliebiger Grösse der Konstanten R . Mithin schneiden die Linien einander nicht, auch nicht in der ebenen oder Euklidischen Geometrie; wenn nämlich $R = \infty$ ist, geht die logarithmisch-sphärische Geometrie in die Euklidische über.

Ist aber $\alpha + \beta < 180^\circ$, so wird

$$\cot \frac{1}{2} \alpha \cdot \cot \frac{1}{2} \beta > 1$$

und daher

$$A = R \log (\cot \frac{1}{2} \alpha \cdot \cot \frac{1}{2} \beta)$$

um so grösser, je grösser die Constante R ist. Mithin schneiden die Linien einander, wenn die schneidende kleiner als

$$R \log \cot \frac{1}{2} \alpha \cdot \cot \frac{1}{2} \beta$$

ist, und in der Euklidischen Geometrie, wenn sie beliebig groß ist.

Ist dagegen $\alpha + \beta > 180^\circ$, so wird der Logarithmus negativ, und die Linien treffen auf der andern Seite zusammen.

Auch die Hypotenuse $[A]$ und die andre*) Kathete $[B]$ eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem ein Winkel gleich Null ist, findet man aus der Formel

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

*) [Die Kathete, die dem verschwindenden Winkel gegenüberliegt, ist ja schon in Nr. 1 des Anhangs bestimmt.]

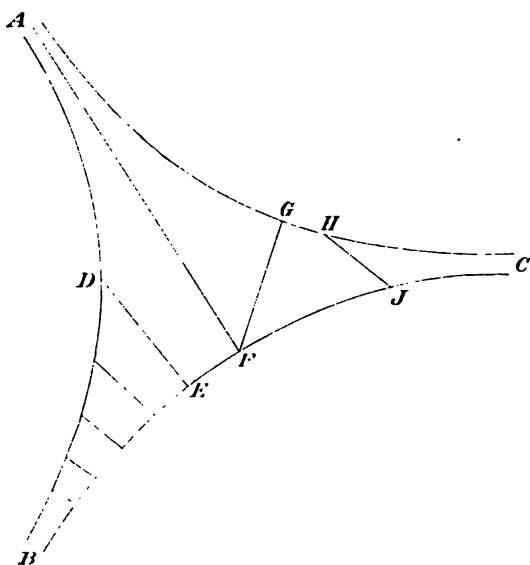


Fig. I.

indem man $\gamma = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ setzt. Es wird nämlich [wegen

$$a = \frac{A}{R\sqrt{-1}}$$

und wegen $\alpha = 90^\circ$] die Hypotenuse:

$$A = R \log (\cot \beta \cot \gamma + \sqrt{\cot^2 \beta \cot^2 \gamma - 1}),$$

oder, da $\cot \gamma = \infty$ sein soll:

$$= R \log (2 \infty \cot \beta) = R (\log 2 + \log \infty + \log \cot \beta).$$

Ebenso wird die andre Kathete

$$B = R (\log 2 + \log \cos \beta + \log \infty),$$

und mithin der Unterschied zwischen Hypotenuse und Kathete gleich:

$$- R \log \sin \beta^*).$$

Wenn daher $\beta = 90^\circ$ ist, so verschwindet der Unterschied, und die Hypotenuse wird ebenso wie die andre Kathete gleich Null; demnach wird eine Linie, die auf zwei von den Seiten des größten Dreiecks senkrecht steht, in das Ende dieser Seiten fallen, die freilich unendlich sind.

Setzt man $\beta = 45^\circ$, so wird der Unterschied zwischen der Hypotenuse A und der Kathete B gleich $R \frac{1}{2} \log 2$, und, wenn $\beta = 0$ ist, wird der Unterschied gleich ∞ .

Aus solchen Unterschieden kann man auch die Linien finden, die von zwei Loten abgeschnitten werden**).

*) [Das Ergebnis ist richtig. Um es in aller Strenge herzuleiten, hat man in den Formeln:

$$A = R \log (\cot \beta \cot \gamma + \sqrt{\cot^2 \beta \cot^2 \gamma - 1})$$

und

$$B = R \log \left(\frac{\cos \beta}{\sin \gamma} + \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} - 1} \right)$$

den Winkel γ als sehr klein anzunehmen und $A - B$ nach Potenzen von γ zu entwickeln. Dann wird

$$A - B = - R \log \sin \beta + (\gamma),$$

wo (γ) für $\gamma = 0$ verschwindet.]

**) [Wahrscheinlich hat *Taurinus* hier Folgendes gemeint: Werden von zwei Punkten D und D' der Seite AB des größten Dreiecks ABC die Lote DE und $D'E'$ auf die Seite BC gefällt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke BED und $BE'D'$, die beide in B den Winkel Null haben. Die beiden Lote schneiden also von AB eine Linie DD' ab, die gleich dem Unterschiede der beiden Hypotenusen BD' und BD , also gleich

$$R \log \frac{\cot BD'E'}{\cot BDE}$$

ist. Ebenso ist

$$R \log \frac{\cos BD'E'}{\cos BDE}$$

der Ausdruck für die Länge der Linie EE' . Von dieser Formel wird später, am Ende der Seite 72 des Originals (hier S. 280), Gebrauch gemacht.]

2. Man soll die Seiten und die Winkel des gleichseitigen Dreiecks finden, das innerhalb des größten Dreiecks so gezeichnet ist, daß seine Ecken auf dessen Seiten liegen.

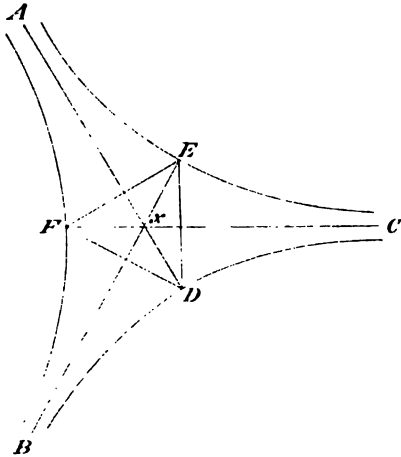


Fig. II.

In dem größten Dreieck ABC (Fig. II.) seien AD , BE , CF die Lote, die einander in dem Mittelpunkt x des Dreiecks schneiden. Man ziehe FE , FD , ED , sodafs das gleichseitige Dreieck FED entsteht. Da für jedes gleichseitige Dreieck die Formel gilt:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

$$\left[a = \frac{A}{R\sqrt{-1}} \right],$$

und da der Winkel EDC gleich $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \arccos(\sin \frac{1}{2}\alpha)$ ist, so wird*)

$$\cos a = \frac{3 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{3 + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha},$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich die Seite des Dreiecks

$$A = R \log \sqrt[5]{\frac{3}{2}};$$

ferner ist $\cos a = \frac{3}{2}$ und $\cos \alpha = 0,6$.

3. Man soll den Inhalt eines Dreiecks finden, wenn dessen Seiten gegeben sind.

Der Inhalt des größten Dreiecks sei gleich M . Wir haben schon 72 bewiesen, daß sich die Flächeninhalte von Dreiecken wie die Unterschiede ihrer Winkelsummen von zwei Rechten verhalten. Nun ist der

*) [Das Dreieck EDC hat nämlich die Winkel 0° , $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, und es ist $DE = A$. Folglich hat man nach der allgemeinen Formel S. 274, Z. 6 v. u.

$$\cos a = \frac{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Wird hierin für $\cos \alpha$ sein Wert

$$\frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

eingesetzt, so ergibt sich die Gleichung des Textes.]

Unterschied, wenn die Seiten a, b, c gegeben sind*), deren halbe Summe gleich S sei, gleich:

$$2 \arcsin \frac{\sqrt{\sin \frac{S}{R\sqrt{-1}} \cdot \sin \frac{S-a}{R\sqrt{-1}} \cdot \sin \frac{S-b}{R\sqrt{-1}} \cdot \sin \frac{S-c}{R\sqrt{-1}}}}{2 \cos \frac{1}{2} \frac{a}{R\sqrt{-1}} \cdot \cos \frac{1}{2} \frac{b}{R\sqrt{-1}} \cdot \cos \frac{1}{2} \frac{c}{R\sqrt{-1}}},$$

und diese Formel hat man, um den Inhalt zu finden, mit M zu multiplicieren und durch π zu dividieren.

Wenn aber das Dreieck gleichseitig ist und sehr kleine Seiten hat, so sind die Winkel ungefähr gleich zwei Rechten, und der Inhalt des Dreiecks ist gleich dem Inhalte des ebenen Dreiecks, das von denselben Seiten gebildet wird. Nun ist:

$$\sin \frac{S}{R\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{\frac{S}{R}} - e^{-\frac{S}{R}} \right)$$

und so weiter, man erkennt daher leicht, daß der Inhalt des Dreiecks dem Werte:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \frac{M}{R^2}$$

sehr nahe kommt**), der seinerseits dem Werte [für das ebene Dreieck]:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

gleich sein muß. Mithin ist:

$$M = \pi R^2,$$

oder, da der Parameter

$$P = R \log(1 + \sqrt{2})$$

ist:

$$M = \frac{\pi P^2}{(\log(1 + \sqrt{2}))^2}.$$

Zu derselben Gleichung kann man auch auf folgende Art unmittelbar gelangen:

Es mögen AB, CD (Fig. III.) zwei Lote sein, die man in einem größten Dreieck von einer Seite auf die andre gefällt hat, und zwar seien sie so klein, daß der Winkel ECD einem Rechten nahe kommt. Alsdann darf man den Flächenraum $ABCD$ dem Inhalt der ebenen

*) [Folgerichtig müßten die Seiten A, B, C genannt werden.]

**) [Ist $a = b = c$ und a sehr klein, so darf man in der Formel für den Dreiecksinhalt die Cosinus durch 1, die Sinus durch ihre Bogen ersetzen. Dann erhält man

$$\frac{2M}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a}{R\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{a}{R\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\pi} \frac{M}{R^2}$$

als Wert für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks.]

Figur gleich setzen, die von denselben Linien eingeschlossen wird, und dasselbe gilt für den ganzen Raum zwischen den unendlichen Linien CE und DE , die sich auf der Seite von E einander immer mehr nähern. Ist aber BD sehr klein, so ist es gleich

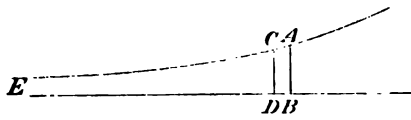


Fig. III.

$R \cdot d \log \cos ECD$
oder, wenn ECD mit φ bezeichnet wird, gleich*)

$$- R \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Ferner ist**)

$$CD = R \log \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi}.$$

Folglich ist der ganze Flächeninhalt bis zum Lote CD gleich:

$$73 \quad S = R^2 d\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \log \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi}.$$

Solange nun φ beinahe ein Rechter ist oder $\sin \varphi$ nahezu gleich Eins, ist der Logarithmus gleich

$$\log (\cos \varphi + 1)$$

und, da $\cos \varphi = \frac{1}{\infty}$ ist, gleich

$$\cos \varphi,$$

mithin die ganze Differentialfunktion gleich $-R^2 d\varphi$ oder der ganze Inhalt gleich

$$(90^\circ - \varphi) R^2,$$

und das größte Dreieck gleich***)

$$\pi R^2.$$

4. Man soll den Umfang eines Kreises finden, dessen Halbmesser gegeben ist.

Wir denken uns ein Dreieck, das von zwei Halbmessern a und von der Sehne b des zwischen beiden liegenden Winkels φ gebildet wird. Nach der Formel:

*) [Setzt man in der zweiten Anmerkung auf S. 277

$$BD'E = \varphi + d\varphi, BDE = \varphi,$$

so erhält man für die gesuchte Linie:

$$R \log \frac{\cos (\varphi + d\varphi)}{\cos \varphi} = R \cdot d \log \cos \varphi.]$$

**) [In Nr. 1 des Anhangs war ja gefunden: $C = R \log \cot \frac{1}{2} \beta$.]

***) [Da das Dreieck ECD den Flächeninhalt $(90^\circ - \varphi) R^2$ besitzt, während seine Winkelsumme $90^\circ + \varphi$ beträgt, so gilt die Gleichung:

$$(90^\circ - \varphi) R^2 : M = (90^\circ - \varphi) : \pi,$$

und es wird daher, wie im Texte richtig angegeben ist: $M = \pi R^2$.]

$$\cos\left(\frac{b}{R\sqrt{-1}}\right) = \sin^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) \cos\varphi + \cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right)$$

wird:

$$\cos\left(\frac{b}{R\sqrt{-1}}\right) = (1 - \cos\varphi) \cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) + \cos\varphi.$$

Wenn daher der Winkel φ sehr klein ist, und man für $\cos\varphi$:

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2\varphi$$

setzt, so ist:

$$\frac{e^{\frac{2b}{R}} + 1}{2e^{\frac{b}{R}}} = \frac{1}{2} \sin^2\varphi \left(\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right) + 1$$

und:

$$b = R \log \left(\sqrt[1]{\frac{1}{4} \sin^4\varphi \left(\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right)^2 + \sin^2\varphi \left(\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right)} + \frac{1}{2} \sin^2\varphi \left(\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right) + 1 \right).$$

Man setze $\sin\varphi$ gleich seinem Bogen, gleich $\frac{\pi}{n}$, wo $n = \infty$. Vernachlässigt man sodann die Glieder, die $\sin^2\varphi$ enthalten, so wird der Logarithmus gleich:

$$\log \left(\frac{\pi}{n} \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1} + 1 \right)$$

oder, da $n = \infty$ ist, gleich

$$\frac{\pi}{n} \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1}.$$

Mithin wird der ganze Umfang gleich*):

$$2nR \frac{\pi}{n} \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1} = 2\pi R \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1}.$$

Man setze zum Beispiel $\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{2}$ oder $a = R \log(1 + \sqrt{2})$,

*) [Setzt man in diesem Ausdruck an die Stelle von $\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right)$ seinen Wert

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{R}} + e^{-\frac{a}{R}} \right),$$

so erhält man für den Umfang genau den Ausdruck:

$$\pi R \left(e^{\frac{a}{R}} - e^{-\frac{a}{R}} \right),$$

den Gaußs 1831 in dem einen seiner Briefe an Schumacher angegeben hat (s. S. 234).]

so ist der Umfang gleich $2R\pi$. Oder, wenn $\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) = 1 + d$, wo d sehr klein ist, so ist der Umfang gleich $2\pi R\sqrt{2d}$, und der 74 Halbmesser $[a]$ gleich

$$R \log(1 + d + \sqrt{(1 + d)^2 - 1}) = R\sqrt{2d}.$$

Bei sehr kleinen Kreisen verhält sich daher der Umfang zum Halbmesser ebenso, wie in der Euklidischen Geometrie. Ist dagegen

$$\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) = \infty,$$

so ist der Umfang im Verhältnis zum Halbmesser unendlich groß.

Auf ähnliche Weise findet man den Inhalt des Kreises, wenn der Halbmesser a gegeben ist. Er ist nämlich gleich*):

$$2\pi \left(\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right) R^2$$

oder, da

$$a = R \log \left(\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) + \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1} \right)$$

ist, gleich

$$\frac{2\pi \left(\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1 \right) a^2}{\left[\log \left(\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) + \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) - 1} \right) \right]^2}.$$

Ist zum Beispiel $\cos\left(\frac{a}{R\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{2}$, so ist der Inhalt des Kreises gleich:

$$\frac{2\pi (\sqrt{2} - 1) a^2}{(\log(1 + \sqrt{2}))^2},$$

während der Umfang desselben Kreises gleich:

$$\frac{2\pi a}{\log(1 + \sqrt{2})}$$

ist.

Die Oberfläche*) der Kugel findet man gleich:

*) [In seiner *Géométrie imaginaire* (Crellesches Journal Bd. 17, S. 307 und 309, Geometrische Werke Bd. 2, S. 596 und 598) findet *Lobatschewskij* für den Flächeninhalt des Kreises vom Halbmesser r den Wert

$$\pi (e^{1/2 r} - e^{-1/2 r})^2$$

und für Oberfläche und Rauminhalt der Kugel vom Halbmesser r die Werte:

$$\pi (e^r - e^{-r})^2 \text{ und } \frac{1}{2} \pi (e^{2r} - e^{-2r} - 4r);$$

die von *Taurinus* angegebenen Ausdrücke gehen für $R = 1$, $a = r$ in die *Lobatschewskij'schen* über.]

$$4\pi \left(\cos^2 \left(\frac{a}{R\sqrt{-1}} \right) - 1 \right) R^2$$

und ihren Rauminhalt gleich:

$$4\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{a}{R\sqrt{-1}} \right) - 1} \cdot \cos \left(\frac{a}{R\sqrt{-1}} \right) - \frac{a}{R} \right);$$

und ebenso beweist man mit leichter Mühe noch vieles Andre.

Zum Schluss sei noch Folgendes bemerkt: In der logarithmisch-sphärischen Geometrie sind zwar die Sinus alle unmöglich, aber die trigonometrischen Formeln enthalten trotzdem nichts Unmögliches, da die Sinus immer in solchen Verbindungen vorkommen, daß ihr Produkt möglich wird. Das ist auch gar nicht wunderbar, weil alle Verbindungen der trigonometrischen Linien aus der Ähnlichkeit von Dreiecken hergeleitet werden, und daher Alles, was von den wahren trigonometrischen Linien bewiesen wird, ebenso auch von den imaginären gilt.

Abweichungen vom Urtext.

- S. 271, Z. 17, 10 v. u. (S. 65, Z. 9, 4 v. u.). Im Urtext steht: > -1 statt: < -1 . Das wiederholt sich auch im Druckfehlerverzeichnis S. 76, Z. 6 v. u., bei uns S. 272, Z. 5, 4 v. u.
- S. 271, Z. 11 v. u. (S. 65, Z. 6 v. u.). $d\alpha \arccos \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}$ statt $d\alpha \arccos \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.
- S. 271, Z. 7 v. u. (S. 65, Z. 2 v. u.) $y < \frac{1}{2}$ statt: $y > \frac{1}{2}$, was übrigens schon *Taurinus* selbst im Druckfehlerverzeichnis (S. 76, Z. 8 v. u.) verbessert hat.
- S. 272, Z. 6, 8 v. o. (S. 66, Z. 7, 8 v. o.). *Taurinus* hat diese Formeln offenbar aus der vorher benutzten richtigen Gleichung:

$$\arccos y = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$$

durch die Substitution: $y = \cos(\alpha\sqrt{-1})$ abgeleitet; bei den so entstehenden Formeln muß aber:

$$\sqrt{\cos^2(\alpha\sqrt{-1}) - 1} = -\sqrt{-1} \sin(\alpha\sqrt{-1})$$

gesetzt werden, was unbequem ist und zu Verwechslungen Anlaß giebt. Wir haben deshalb in beiden Formeln der rechten Seite das entgegengesetzte Vorzeichen erteilt, als bei *Taurinus*.

- S. 272, Z. 5—1 v. u. (S. 76, Z. 7—1 v. u.). Die Anmerkung lautet im Urtext folgendermaßen:
 „pag. 66. notandum erat, si cosinus fierent negativi, > -1 , formulam generalem p. 65. converti eaque etiam exprimi latus per angulos, negative tamen; quod eum sensum habere videtur, ut anguli (qui hic sunt $> 120^\circ$) non sint anguli trianguli, sed eorum complementa ad duos rectos.“
- S. 274, Z. 18—16 v. u. (S. 69, Z. 1—4 v. o.). Die Überschrift lautet im Urtext:
 „Additamentum | solutiones problematum geometriae logarithmo | sphaericae insigniorum continens. | (Cum adjecta tabula.)“
- S. 275, Z. 2—4 v. o. (S. 69, Z. 15 v. o.). Im Urtext steht: „sed $\cos c = \frac{e^c + e^{-c}}{2}$, itaque $c = \log \cotang \frac{1}{2} \beta$ “, während nachher für $\beta = 45^\circ$ richtig: $C = R \log (1 + \sqrt{2})$ angegeben ist.
- S. 275, Z. 14, 13 v. u. (S. 70, Z. 1 v. o.). „Vice versa $\cotang \frac{1}{2} \beta \text{ est } = e^c$, et posito $c = 1$ “.

- S. 276, Z. 4 v. o. (S. 70, Z. 8 v. o.). Der Faktor R fehlt im Urtext, während er nachher, bei der Betrachtung des Falles $\alpha + \beta < 180^\circ$, angegeben ist.
- S. 276, Z. 6, 5 v. u. (S. 70, Z. 5, 4 v. u.) „Hypotenusae quoque et alteri catheti trianguli rectanguli . . . inveniuntur.“
- S. 277, Z. 10 v. o. (S. 71, Z. 5 v. o.). Der Faktor R fehlt.
- S. 278, Z. 14, 15 v. o. (S. 71, Z. 7 v. u.) „angulus $EDC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, = arc. sin. $\frac{1}{2}\alpha$ “.
- S. 279, Z. 3 v. o. (S. 72, Z. 5 v. o.). Im Urtext fehlt bei S , a , b , c der Faktor

$$\frac{1}{R\sqrt{-1}},$$

den wir hier wie im Folgenden überall hinzugefügt haben.

Man könnte allerdings annehmen, daß *Taurinus* wie früher auch hier unter a , b , c die durch $R\sqrt{-1}$ dividierten Seiten versteht, aber selbst dann hätte eine ganze Anzahl von Formeln geändert werden müssen. *Taurinus* hat offenbar den ganzen Anhang sehr schnell geschrieben und sich dabei gewisser Abkürzungen bedient, wie man das in Aufzeichnungen für den eignen Gebrauch zu thun pflegt; zum Beispiel hat es ganz den Anschein, daß er die Zeichen $\cos c$ und $\sin c$ in ähnlicher Bedeutung benutzt, wie man heutzutage den hyperbolischen cosinus und sinus benutzt. Da er immer den richtigen Weg angibt und auch zu richtigen Endergebnissen gelangt, so unterliegt es keinem Zweifel, daß die Ungenauigkeiten des Urtextes durch das Gesagte zur Genüge erklärt sind. Wir haben uns bestrebt, alle diese Ungenauigkeiten zu beseitigen und den Text unmittelbar verständlich zu machen, werden aber im Folgenden, wie immer, von jeder, auch noch so kleinen Abweichung vom Urtext Rechenschaft geben.

- S. 279, Z. 9, 10 v. o. (S. 72, Z. 11, 12 v. o.). „Et cum sit $\sin . S = \frac{e^S - e^{-S}}{2}$ etc.“
- S. 279, Z. 13 v. o. (S. 72, Z. 13 v. o.). Im Nenner fehlt der Faktor R^2 , während nachher richtig: $M = \pi R^2$ gefunden wird.
- S. 280, Z. 5, 8, 10 v. o. (S. 72, Z. 3, 2, 2 v. u.). Bei allen drei Formeln fehlt der Faktor R .
- S. 280, Z. 12, 18 v. o. (S. 73, Z. 1, 4 v. o.). Bei den Differentialausdrücken fehlt beide Male der Faktor R^2 , während er in der endgültigen Formel für den Flächeninhalt: $(90^\circ - \varphi)R^2$ angegeben ist.
- S. 280, Z. 14 v. u. (S. 73, Z. 7 v. o.). „3.“ statt: „4.“
- S. 281, Z. 1, 3 v. o. (S. 73, Z. 11, 12 v. o.). Bei a und b fehlt wiederum der Faktor

$$\frac{1}{R\sqrt{-1}}.$$

- S. 281, Z. 7, 9, 10, 14, 16, 18 v. o. (S. 73, Z. 11, 10, 9, 6, 5, 4 v. u.). Dem Vorhergehenden entsprechend stehen im Urtext a und b statt:

$$\frac{a}{R\sqrt{-1}} \text{ und } \frac{b}{R}.$$

- S. 281, Z. 8 v. u. (S. 73, Z. 4 v. u.). In beiden Ausdrücken fehlt der Faktor R .
- S. 281, Z. 7 v. u. und S. 282, Z. 1, 2 v. o. (S. 73, Z. 3, 2, 1 v. u.). „Ponatur v. g. $\cos . a = \sqrt{2}$, vel $a = \log . (1 + \sqrt{2})$, periphæria erit $= R\pi$: vel si $\cos . a$ sit. $= 1 + d$, ubi d exiguum sit, circumferentia erit $= \sqrt{2}d$ “.

S. 282, Z. 4 v. o. (S. 74, Z. 1, 2 v. o.) fehlt in beiden Ausdrücken der Faktor R .
 S. 282, Z. 7, 11, 13, 15, 16 v. u. (S. 74, Z. 3, 7, 8, 9, 10 v. o.). Überall $\cos . a$

statt $\cos \left(\frac{a}{R\sqrt{-1}} \right)$.

S. 283, Z. 1, 3 v. o. (S. 74, Z. 12, 11 v. u.). $\cos . a$ und a statt:

$$\cos \left(\frac{a}{R\sqrt{-1}} \right) \text{ und } \frac{a}{R}.$$

Die in runde Klammern eingeschlossenen Seitenzahlen beziehen sich auf die Originalausgabe der Geometriae prima elementa. Köln 1826.

VERZEICHNIS

VON

SCHRIFTEN ÜBER DIE PARALLELENTHEORIE,

DIE BIS ZUM JAHRE 1837 ERSCHIENEN SIND.

Bei der Aufstellung des folgenden Verzeichnisses von Schriften über die Parallelentheorie haben wir eine Reihe wertvoller Vorarbeiten benutzen können, die am Ende dieser Einleitung in chronologischer Reihenfolge aufgezählt sind.

Wir haben geglaubt, eine Pflicht der Gerechtigkeit zu erfüllen, indem wir hinter den Schriften, die wir von unsern Vorgängern übernommen haben, den Namen des Autors nannten, bei dem sie zuerst erwähnt werden. Hiermit haben wir zugleich einen andern Zweck erreicht. Da wir uns bald überzeugten, daß viele unter diesen Angaben unvollständig und ungenau waren, sind wir bemüht gewesen, die Schriften, die wir anführen, soweit das irgend möglich war, selbst einzusehen. Die Schriften, die wir uns verschaffen konnten, sind mit einem (*) bezeichnet; wo uns nur eine spätere Auflage zu Gebote stand, ist ein (†) angewandt worden. Nur für den so gekennzeichneten Teil unsers Verzeichnisses können wir die volle Verantwortlichkeit übernehmen. Wo wir uns auf unsre Vorgänger verlassen mußten, ist auf die soeben erwähnte Art immer ein Gewährsmann, in Fällen, wo die Angaben einander widersprechen, sind mehrere angeführt.

Ogleich die Anzahl der Schriften unsers Verzeichnisses bis auf 253 angewachsen ist, können wir keinen Anspruch auf unbedingte Vollständigkeit machen. Wir hoffen indes, nichts Wesentliches übersehen zu haben. Damit man erkennt, was wir als wesentlich ansehen, wollen wir die Grundsätze darlegen, die uns bei der Aufstellung des Verzeichnisses geleitet haben.

Eine große Schwierigkeit lag darin, daß es unmöglich ist, eine scharfe Grenze zwischen den Schriften zu ziehen, welche die Parallelentheorie im engern Sinne und denjenigen, welche die Grundlagen der Geometrie überhaupt behandeln. Von der überaus großen Zahl der Euklid-Kommentare haben wir daher nur die aufgenommen, in denen die Parallelentheorie ausführlicher behandelt wird. Dasselbe gilt von den ebenso zahlreichen Lehrbüchern der elementaren Geometrie. Wir verkennen nicht, daß die Entscheidung über die Aufnahme oft

recht schwer war, und dafs subjektives Ermessen dabei ins Spiel gekommen sein mag. Übrigens hat Riccardi 1887—1890 in den *Memorie di Bologna* eine sehr sorgfältige und vollständige Aufzählung der Euklid-Ausgaben und Euklid-Kommentare gegeben, und eine große Anzahl von Lehrbüchern ist von Schotten besprochen worden.

Ebenso haben wir darauf verzichtet, Besprechungen von Werken über Parallelentheorie, die sich in kritischen Zeitschriften — wie den Göttingischen gelehrten Anzeigen, der Jenaer Literaturzeitung, den Heidelberger Jahrbüchern — finden, in unser Verzeichnis aufzunehmen; nur in einigen wichtigen Fällen sind wir von diesem Grundsatz abgewichen. Endlich ist zu bemerken, dafs neue Auflagen nur dann besonders angeführt worden sind, wenn sie von den älteren erheblich abweichen.

Hinter dem chronologisch geordneten Verzeichnisse der Schriften über die Parallelentheorie findet man die Autoren, so weit das möglich war mit Angabe ihrer Lebenszeit, in alphabetischer Folge angegeben.

Das Jahr 1837, mit dem wir unser Verzeichnis abbrechen, ist für die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie von besonderer Bedeutung: 1837 erschien im siebzehnten Bande von Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Lobatschewskijs *Géométrie imaginaire*, und damit erfuhr zum ersten Male die ganze mathematische Welt etwas von dem Vorhandensein einer nichteuklidischen Geometrie. Die in den Jahren von 1837 bis zum Tode von Gauß erschienenen Arbeiten über Parallelentheorie sind zum größten Teil so unbedeutend, dafs wir nicht für nötig gehalten haben, sie vollständig aufzuführen; die wirklich wichtigen unter ihnen haben wir ja bereits in der Einleitung zu dem Abschnitte über Schweikart und Taurinus erwähnt.

Zum Schlusse richten wir an die Leser unsers Buches die Bitte, Lücken oder Ungenauigkeiten, die sie in unserm Verzeichnis bemerken, der Verlagsbuchhandlung mitteilen zu wollen; jede, auch die kleinste Verbesserung werden wir mit Dank entgegennehmen.

— — — — —

Bibliographische Quellen in chronologischer Folge.

Hinter jeder dieser Quellenschriften ist in kleiner Schrift das Stichwort angegeben, durch das sie im Folgenden bezeichnet wird.

- Klügel**, G. S., *Conatum praecipuorum theoriæ parallelarum demonstrandi recensio*. Dissertation. Göttingen 1763. 4°. Klügel.
- Murhardt**, F. W. G., *Litteratur der mathematischen Wissenschaften*. Band 1, Leipzig 1797, Band 2, 1798. 8°. Murhardt.
- Voit**, P. Chr., *Percursio conatum demonstrandi parallelarum theoriæ de iisque judicium*. Dissertation. Göttingen 1802. 8°. Voit.
- Hoffmann**, J. J. J., *Critik der Parallelen-theorie*. Erster Teil. Jena 1807. Hoffmann, Critik.
- Schweikart**, F. C., *Die Theorie der Parallelinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie*. Leipzig und Jena 1807. 8°. S. 2—6. Schweikart.
- Müller**, J. W., *Auserlesene Mathematische Bibliothek*. Nürnberg 1820. 8°. S. 229—234. Müller.
- Müller**, J. W., *Repertorium der mathematischen Literatur*. Augsburg und Leipzig. 3 Teile. [1822 bis 1825]. 8°. Müller, Repertorium.
- Wahl**, F. W. L., *Dissertatio mathematica symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens*. Particula I. Insunt IV theoriae earumque censura. Jena 1823. 4°. Wahl.
- Ersch**, Joh. Sa., *Literatur der Mathematik, Naturwissenschaft und Gewerbekunde mit Inbegriff der Kriegskunst*. Neue fortgesetzte Ausgabe von F. W. Schweiger. Band 3 der zweiten Abteilung von: Ersch, Handbuch der deutschen Literatur. Zweite Ausgabe. Leipzig 1828. 8°. Spalte 49—51. Ersch.
- Rogg**, J., *Handbuch der mathematischen Literatur*, Erste Abteilung. Tübingen 1830. 8°. Rogg.
- Hill**, C. J., *Conatum theoriæ linearum parallelarum stabiliendi praecipuorum brevis recensio*. Pars 1. Lund 1835. 4°. Hill.
- Sohnke**, L. A., Artikel *Parallel* in der Allgemeinen Encyclopädie der Wissenschaften und Künste von Ersch und Gruber. Dritte Section. Bd. 11. Leipzig 1838. 4°. S. 368—384. Sohnke.
- Sohnke**, L. A., *Bibliotheca mathematica*. Verzeichniss der Bücher über die gesammten Zweige der Mathematik, welche in Deutschland und dem Auslande vom Jahre 1830 bis Mitte des Jahres 1854 erschienen sind. Leipzig 1854. 8°. Sohnke, Bibliotheca.
- Hoffmann**, J. J. J., *Das eülfte Axiom der Elemente des Euclides, neu bewiesen, mit erläuternden und erweiternden Bemerkungen versehen*. Halle a. S. 1859. 8°. Hoffmann.

Poggendorff, J. C., *Biographisch-literarisches Handwörterbuch*. 2 Bände. Leipzig 1863. 4°.

Poggendorff.

Riccardi, P., *Biblioteca matematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX*. Vol. I. P. 1. Modena 1870. P. 2. Modena 1876. 8°.

Riccardi, Biblioteca.

Riccardi, P., *Saggio di una bibliografia euclidea*. Memorie della R. Accademia di Bologna, serie 4, t. VIII, 1887, S. 401—523; t. IX, 1888, S. 321—343; serie 5, t. I, 1890, S. 27—64.

Riccardi, Saggio.

Riccardi, P., *Elenco cronologico di una serie di monografie attinenti al quinto postulato di Euclide, alla teoria delle parallele ed ai principj della geometria euclidea*. Memorie della R. Accademia di Bologna, serie 5, t. I. 1890, S. 65—84.

Riccardi.

Schotten, H., *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*. 2 Bände. Leipzig 1890 und 1893. 8°.

Schotten.

1482.

***Euklid**, Preclarissimus liber elementorum Euclidis etc. Venedig (Erhard Ratdolt). fol. (*Erster Druck.*)

1533.

***Proklos**, *Εὐκλείδου στοιχείων βίβλ. ιε' ἐκ τῶν Θεῶνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον ἐξηγημάτων Πρόκλου βίβλ. δ'.* Basel (Joh. Herweg). fol. (*Editio princeps.*)

1557.

***Peletier**, Jacques. In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum libri sex. Leyden. fol. *Wildt 1795, Schweikart.*

1560.

***Barozzi**, Francesco, Procli Diadochi Lycii philosophi platonici et mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII summa opera a Francisco Barocio Patritio Veneto expurgati Scholiis et Figuris aucti primum iam romanae linguae venustate donati et nunc recens editi. Padua. fol. *Poggendorff 1, 104 hat 1565.*

1569.

***Ramus**, Petrus, Scholarum mathematicarum libri XXXI. Lib. V. S. 41. Lib. VII. S. 165. Basel. 4^o. *Sohnke.*

um 1570.

Belli, Silvio, Gli Elementi Geometrici.

In seinem Trattato della proportionione et proportionalità communi passioni del quanto libri tre, Venedig 1573 sagt Belli (Blatt 5), daß er am Ende seiner Elementi Geometrici einen Beweis der fünften Forderung gegeben habe. Diese Elemente werden jedoch weder bei Poggendorff noch bei Riccardi angeführt, noch sind sie auf den uns zugänglichen Bibliotheken vorhanden.

1574.

†**Clavius**, Christoph, Euclidis elementorum libri XV. Accessit XVI. de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati. Rom. 8^o. (*Opera, t. I. Mainz 1591.) *Riccardi, Saggio, t. IX, S. 326.*

1587.

- ***Patricio, Francesco**, Della nuova geometria libri XV. Ferrara. 4^o.
Riccardi, Biblioteca 2, 252.

1594.

- ***Naṣīr-Eddīn**, Euclidis elementorum libri XIII studio Nassiredini
 Tusini primum arabice impressi. Rom. fol. *Klūgel.*

1603.

- ***Cataldi, Pietro Antonio**, Operetta delle linee rette equidistanti,
 et non equidistanti. Bologna. 4^o. 36 S. *Klūgel.*
 **Dasselbe lateinisch:*
 Opusculum de lineis rectis aequidistantibus, et non aequidistan-
 tibus. Bologna. 4^o. 36 S. *Klūgel.*

1604.

- Cataldi, Pietro Antonio**, Aggiunta all' operetta delle linee rette
 equidistanti, et non equidistanti. Bologna. 4^o.
Riccardi, Biblioteca 1, 303.
 †**Kepler, Johann**, Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae
 pars optica traditur. Frankfurt. 4^o. (*Opera omnia ed. Frisch.
 Vol. II. S. 185—188.) *Hagen, Synopsis, 2, 7.*
Oliver of Bury, Thomas, De rectorum linearum parallelismo et con-
 cursu doctrina geometrica. *Wallis, Opera, t. II, S. 669.*

um 1613.

- Valerio, Luca**, Trattato sulla quinta dimanda del primo d'Euclide.
*Von Valerio in einem Briefe an Galilei vom 31. August 1613 erwähnt:
 La deduzione si estende per molte proposizioni e passi difficili, ma però con
 facilità e chiarezza dimostrati. (Le Opere di Galileo Galilei, prima edizione
 completa, t. VIII. Firenze 1851. S. 283.) Ein solcher Trattato wird
 jedoch weder bei Poggendorff noch bei Riccardi angeführt, noch ist er
 auf den uns zugänglichen Bibliotheken vorhanden.*

1621.

- ***Savile, Henry**, Praelectiones tresdecim in principium Elementorum
 Euclidis habitae 1620. Oxford. 4^o.

1637.

- Gestrin, Martin**, In geometriam Euclidis demonstrationum libri sex.
 Upsala. *Eneström, Biblioteca matematica, Bd. I. Stockholm 1884. S. 79.*

1639.

- †**Desargues, Girard**, Brouillon project d'une atteinte aux événemens
 des rencontres d'un cone avec un plan. (*Oeuvres de Desargues.
 Paris 1864. Bd. 1. S. 104.) *R. Baltzer, Elemente 1. Aufl. Bd. 2, S. 13, 1862.*

1641.

- *Guldin, Paul, Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae. Lib. IV. Wien. fol. *Borelli 1658.*

1654.

- †Tacquet, Andrea, Elementa geometriae planae et solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Antwerpen. 4°. (*Amsterdam 1701.) *Riccardi, Saggio, t. IX, S. 329.*

1655.

- †Hobbes, Thomas, Elementorum philosophiae sectio prima. London. (*The english Works of Thomas Hobbes, edited by Sir William Molesworth, Vol. I. London 1839. 8°. S. 189—190.)

1656.

- †Hobbes, Thomas, Six lessons to the professors of the mathematics, one of geometry, the other of astronomy, in the chairs set up by the noble and learned Sir Henry Savile, in the university of Oxford. London. (*The english Works of Thomas Hobbes, edited by Sir William Molesworth, Vol. VII. London 1845. 8°. S. 205—206.)

1658.

- *Borelli, Jo. Alphons, Euclidis restitutus sive prisca geometriae elementa brevius et facilius contexta. Pisa. 4°. *Saccheri 1733.*

1667.

- †[Arnauld, Antoine], Nouveaux Éléments de Géométrie. Paris. 4°. (*Haag, 1690. 8°).

1671.

- *Guarini, Guarino, Euclides adauctus et methodicus. Turin. fol.

- *Pardies, Ignace Gaston, Éléments de Géométrie. Paris. 12°.

Klügel.

1680.

- *Giordano, Vitale da Bitonto, Euclide restituito overo gli antichi elementi geometrici ristaurati, e facilitati. Libri XV. Rom. fol.

Klügel.

1686.

- Giordano, Vitale da Bitonto, Euclide restituito overo gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati. Libri XV. Seconda impressione con nuove Additioni. Rom. fol.

Murhardt 2, 36. Riccardi, Biblioteca 1, 603.

1693.

- ***Nasir-Eddin**, Nasaraddini Demonstratio. (Von Wallis vorgetragen 1651. Opera t. II. Oxford. 1693. fol. S. 669.) *Saccheri 1733.*
 ***Wallis**, John, Demonstratio Postulati Quinti. (Vorgetragen 1663. Opera t. II. Oxford. 1693. fol. S. 674—678.) *Saccheri 1733.*
 ***Wallis**, John, De Postulato quinto; et definitione quinta Lib. 6. Euclidis; disceptatio geometrica. Opera t. II. Oxford. fol. S. 665—669. *Saccheri 1733.*

1710.

- ***Wolff**, Christian, Die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. Erster Theil. Halle. 8°.

1715.

- †**Malezien**, Nicolaus de, Éléments de Géométrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne. (*2. éd. 1722.) *Klügel. Poggendorff 2, 25. Murhardt 1, 248 hat 1705.*
 ***Wolff**, Christian, Elementa Matheseos Universae. t. I. Halle 1715. 4°. *Klügel erwähnt die Ausgabe von 1730.*

1731.

- Varignon**, Pierre, Éléments de Mathématiques. Paris. 4°. *Klügel. Poggendorff 2, 1175 hat 1732.*

1733.

- ***Saccheri**, Girolamo, Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia. Mailand. 4°. *Klügel.*

1734.

- ***Hausen**, Christian August, Elementa matheseos. Leipzig. 4°. *Klügel.*

1739.

- †**Segner**, Johann Andreas, Elementa arithmeticae geometriae et calculi geometrici. Göttingen. 8°. (*Halle 1756. 8°.)

1741.

- ***Clairaut**, Alexis Claude, Éléments de Géométrie. Paris. 8°. *Klügel.*

1744.

- Strömer**, Märten, Euclidis elementa eller grundeliga inledning till geometrien. Första delen som innehåller de sex första böckerna. Upsala. 8°. *Hilf. Poggendorff 2, 1029 hat 1760.*

1746.

***La Chapelle**, de, Institutions de géométrie. 2 vol. Paris. 8°.

Poggendorff 1, 1338. Voit erwähnt die [vierte] Ausgabe von 1765.

1747.

***Segner**, Johann Andreas, Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie. Lemgo. 4°. *Klügel.*

†**Simpson**, Thomas, The elements of Geometry. London. 8°. (*London 1821.)

1750.

Camus, Charles Etienne Louis, Cours de mathématiques. II. partie: Éléments de Géométrie. Paris. *Klügel. Poggendorff 1, 368 hat 1766.*

1751.

Hanke, F. G., Principia theoriae de infinito mathematico et demonstrationem possibilitatis parallelarum publice eruditorum examini subjiunt Fredericus Gottlob Hanke et Benjamin Gottlob Binder. Breslau. 4°. 19 S. *Klügel.*

1752.

†**Boscovich**, Ruggiero Giuseppe, Elementorum universae matheos ad usum studiosae juventutis Tomus I. Rom. 8. (Die Königliche Bibliothek zu Berlin besitzt Ausgaben von *1754 und *1759.)

Riccardi, Biblioteca 1, 177.

***Kraft**, G. W., De numero pari, rectis parallelis et principio actionis minimae. Tübingen. *Poggendorff 1, 1309 hat 1753.*

1753.

***Kraft**, Georg Wolfgang, Institutiones geometriae sublimioris. Tübingen. 4°.

Sauveur, Joseph, Géométrie élémentaire et pratique du feu M. Sauveur M. le Blond. Paris. 4°.

Klügel. Poggendorff hat unter le Blond 1, 1398 die Jahreszahl 1758.

1756.

†**Simson**, Robert, The Elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. In this Edition Errors by which Theon, or others, have long ago vitiated these books are corrected and some of Euclid's Demonstrations are restored. Glasgow. 4°. (*2. edition, Glasgow 1762. 8°.) *Voit.*

1758.

- ***Kaestner**, Abraham Gotthelf, Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Perspective. Göttingen. 8°. *Klügel.*
Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, Praelectiones matheseos theoreticae elementaris. Rostock und Wismar. 8°. *Klügel.*
Koenig, C. G., Éléments de Géométrie, contenant les six premiers livres d'Euclide mis dans un nouvel ordre et à la portée de la jeunesse. Haag. *Klügel. Riccardi, Saggio.*
 ***Montucla**, Jean Étienne, Histoire des Mathématiques. t. I. Paris. 4°.

1759.

- *[**Alembert**, Jean le Rond d'], Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie. Nouvelle édition. t. V. Amsterdam. 8°. *Voit erwähnt die [vierte] Ausgabe von 1767.*

1760.

- ***Karsten**, Wenceslaus Johann Gustav, Mathesis theoretica elementaris et sublimior. Rostock und Greifswald. 8°. *Klügel.*

1761.

- Hagen**, Johann Jacob von, Dissertatio mathematica sistens linearum parallelarum proprietates nova ratione demonstratas, quam publicae eruditorum disquisitioni subjiciunt Fredericus Daniel Behn et respondens Johann Jacob de Hagen. Jena. 4°. 28 S. *Klügel.*

1763.

- ***Klügel**, Georg Simon, Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel, Göttingen. 4°. 30 S. 1 Tfl. *Lambert 1766.*

1770.

- ***Bezout**, Étienne, Cours de mathématiques à l'usage du corps royal d'artillerie. 4 Vol. Paris 1770—1772. 8°. *Sohnke.*
 ***Scherffer**, Karl, Institutionum geometricorum pars prior sive geometria elementaris. Wien. 4°. *Haug 1793.*

1771.

- Boehm**, Andreas, De rectis parallelis dissertatiuncula. Acta philosophico-medica societ. acad. scient. Hassiacae. Jahrgang 1771. S. 1. Frankfurt und Leipzig. *Murhardt 2, 79.*

1772.

- ***Luino**, Francesco, Lezioni di matematica elementare. Mailand. 8°. *Riccardi, Biblioteca 2, 57.*

1775.

- ***Bossut**, Charles, Traité élémentaire de Géométrie. Paris. 8°. *Sohnke. Poggendorff 1, 249 hat 1774.*
- ***Büsch**, Johann Georg, Encyclopaedie der historischen, philosophischen und mathematischen Wissenschaften. Hamburg. 8°. *Poggendorff 1, 336. Hill hat 1795.*
- Simson**, Robert, The elements of Euclid etc. To this fifth Edition also annexed Elements of plain and spherical trigonometry. Edinburg. 8°. *Riccardi, Saggio.*

1778.

- ***Bertrand**, Louis, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genf. 4°. t. II. S. 19. *Hindenburg 1786. Poggendorff 1, 171 hat 1774.*
- ***Karsten**, Wenceslaus Johann Gustav, Versuch einer völlig berichtigten Theorie der Parallelen. Halle a. S. 4°. 20 S. *Voit.*
- Kesaer**, Franz Xaver von, Abhandlung über die Lehre von den Parallellinien. Wien. 8°. 27 S. 1 Tfl. *Murhardt 2, 79.*

1780.

- Hauser**, Matthias, Theorie der Parallelen. Abhandlungen der Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche der k. k. Ingenieur-Academie. Wien. 2. Teil. S. 34. *Hill.*
- Schultz**, Johann, Vorläufige Anzeige des entdeckten Beweises für die Theorie der Parallellinien. Königsberg. 8°. *Poggendorff 2, 860.*

1781.

- Austin**, William, An examination of the first six books of Euclid's elements. London. *Murhardt 2, 44.*
- Felkel**, Anton, Neu eröffnetes Geheimniss der Parallellinien. Wien. 8°. 6 Bogen. 1 Tfl. *Murhardt 2, 80.*
- ***Hindenburg**, Karl Friedrich, Ueber die Schwierigkeiten bei der Lehre von den Parallellinien. Magazin für Naturkunde, Mathematik und Oekonomie. Leipzig. 8°. Jahrgang 1781. S. 145—168, 342—371. *Sohnke.*

1783.

- [**Pagnini**, Joseph Maria], Theoria rectorum parallelarum ab omni scrupulo vindicata. Auctore J. M. P. C. P. Parma. 8°. *Riccardi.*

1784.

Schultz, Johann, Entdeckte Theorie der Parallelen, nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit. Königsberg. 8°. 144 S. 2 Tfl. *Murhardt, 2, 80.*

Venturi, Giambattista, Memoria intorno alle linee parallele. (In seinem Lehrbuche: Proposizione di geometria piana.) Modena. 4°. *Riccardi.*

1786.

* **Bendavid, Lazarus**, Über die Parallelinien. Schreiben an Herrn Hofrath Karsten. Berlin. 8°. 16 S. 1 Tfl. *Murhardt 2, 80.*

* **Eichler, Caspar**, De theoria parallelarum Schulziana. Dissertation Leipzig. 4°. 25 S. 4 Fig. *Ersch. Hill.*

Gensichen, J. F., Bestätigung der Schulze'schen Theorie der Parallelen und Widerlegung der Bendavid'schen Abhandlung über die Parallelen. Königsberg. 8°. *Ersch. Rogg S. 330.*

* **Hindenburg, Karl Friedrich**, Noch etwas über die Parallelinien. — System der Parallelinien. Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Bernoulli und Hindenburg. Leipzig. 8°. Jahrgang 1786. 3. Stück. S. 359—404. *Voit.*

Hofmann, Berichtigung der ersten Gründe der Geometrie nebst dem Beweise, dass ein einzelnes Körpertheilchen einen Raum einnimmt. Mainz. *Hindenburg 1786, S. 396.*

* **Karsten, Wenceslaus Johann Gustav**, Über die Parallelinien. Mathematische Abhandlungen, zweite Abhandlung. Halle a. S. 4°. *Murhardt 2, 81.*

* **Lambert, Johann Heinrich**, Theorie der Parallelinien (aufgesetzt Sept. 1766). Magazin für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Bernoulli und Hindenburg. Leipzig. 8°. Jahrgang 1786. 2. Stück, S. 137—164, 3. Stück, S. 325—358. *Voit.*

Schultz, Johann, Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen. Königsberg. 8°. 60 S. *Ersch. Sohnke.*

1787.

* **Franceschini, Francesco Maria**, Teoria delle parallele rigorosamente dimostrata. Opuscoli matematici. Bassano. 8°. *Voit.*

1788.

Schübler, Christian Ludwig, Versuch der Einrichtung unseres Erkenntnissvermögens durch die Algebra nachzuspüren. Leipzig. *Wahl.*

1789.

* **Alembert, Jean le Rond d'**, Artikel: Parallèle in dem Dictionnaire encyclopédique des Mathématiques. Paris. 4°. t. II. S. 511.

† **Bonnycastle**, John, Elements of Geometry containing the principal propositions in the first six and the eleventh and twelfth book of Euclid, with notes critical and explanatory. London. (*5. edition. London 1811. 8°.) *Rogg. S. 303.*

Lindquist, Johann Hendrik, Dissertatio sistens theoriā linearum parallelarum. Aboe. 16 S. 1 Tfl. *Hill. Murhardt 2, 80 unter Rosenback.*

Voigt, Johann Heinrich, Dissertatio mathematica exhibens tentamen ex notione distincta et completa lineae rectae axiomatis XI Euclidis veritatem demonstrandi. Jena. 4°. 34 S. 1 Tfl. *Hoffmann, Critik*

1790.

Cagnazzi, Lucca, Memoria sulle curve parallele. Neapel. *Sohnke.*

* **Kaestner**, Abraham Gotthelf, Was heisst in Euclids Geometrie möglich? Philosophisches Magazin herausgegeben von J. A. Eberhardt. Halle a. S. *Murhardt 2, 45.*

* **Schötteringk**, M. W. von, Demonstratio theorematis parallelarum. Hamburg. 8°. 30 S. *Murhardt 2, 81.*

* **Swinden**, Jan Hendrik van, Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam. 8°.

1791.

* **Lorenz**, Johann Friedrich, Grundriss der reinen und angewandten Mathematik. Helmstedt. 8°. 2 Teile. *Hill.*

Voigt, Johann Heinrich, Die Grundlehren der reinen Mathematik. Jena. 8°. 2 Tfln. *Wahl.*

1792.

* **Castillon** (Castiglione), Giovan, Sur les parallèles d'Euclide. Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin. Années 1786/87. Berlin 1792. S. 233—254, Années 1788/89. Berlin 1793. S. 171—202. Berlin. 4°. *Schweikart.*

* **Ebert**, Johann Jacob, Programma academicum de lineis rectis parallelis. Wittenberg. 4°. 14 S. 1 Tfl. *Murhardt 2, 81.*

1793.

* **Hauff**, Johann Karl Friedrich, Programma academicum quo duas vexatissimas matheseos purae elementaris theorias enodare inque luce dudum desiderata collocare conatur. Marburg. 4°. 33 S. *Müller.*

1794.

* **Legendre**, Adrien Marie, Éléments de géométrie. Paris. 8°. *Hoffmann, Critik.*

Pagnini, Joseph Maria, Epistola in qua continentur castigationes ac supplementa libelli Parmae anno MDCCLXXXIII editi. Parma. 8°.

Riccardi.

1795.

***Fourier**, Jean Baptiste Joseph, Séance de l'Ecole normale du 25 pluviôse an III. Séances des Ecoles normales. Débats. Tome I. Nouvelle édition, Paris 1800. S. 28. (Wieder abgedruckt *Mathésis*, t. IX. 1889. S. 137—141.)

Mansion, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Année 1888/89. S. 57.

***Rehbein**, J. H. E., Versuch einer neuen Grundlegung der Geometrie. Göttingen. 8°.

Müller.

[**Saladini**, Girolamo], Trattato delle parallele.

Riccardi.

Wildt, Johann Christian Daniel, Systematis matheseos proxime vulgandi specimen. Theses quae de lineis parallelis respondent. Habilitationsschrift. Göttingen. 8°. 35 S. 1 Tfl. *Murhardt 2, 82.*

1796.

*[**Anders**], Bemerkungen über die Theorie der Parallelen des Herrn Hofprediger Schulz und der Herrn Gensichen und Bendavid. Libau. 8°. 207 S. 2 Tfl.

Schweikart.

***Kaestner**, Abraham Gotthelf, Geschichte der Mathematik. Bd. I. S. 269.

Schweikart.

1797.

***Langsdorf**, Karl Christian, Theorie der Parallellinien in: Ch. v. Wolf's neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften. Mit Zusätzen von Joh. Tob. Mayer und Karl Chr. Langsdorf. Marburg.

Hauff 1799.

Playfair, Elements of geometry, containing the first six books of Euclid. Edinburgh und London. 8°. *Rogg. S. 324. Poggendorff 2, 470 hat 1796.*

***Schmidt**, Georg Gottlieb, Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche auf Schulen und Universitäten. Frankfurt a. M. 8°. Bd. 1. S. 131.

Sohnke.

1798.

***Gilbert**, Ludwig Wilhelm, Die Geometrie nach Legendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St Vincentio und den Alten ausführlich dargestellt. Teil 1. Halle a. S. 8°.

1799.

***Hauff**, Johann Karl Friedrich, Neuer Versuch einer Berichtigung der Euklidischen Theorie der Parallelen. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Hindenburg. Leipzig. 8°. Heft 9, S. 74. Heft 10, S. 178.

Hofmann, Critik.

***Hindenburg**, Karl Friedrich, Bemerkungen zu dem Aufsatz von Hauff. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Hindenburg. Leipzig. 8°. Heft 9, S. 75.

***Montucla**, Jean Étienne, Histoire des Mathématiques. 2. édition. t. I. Paris. 4°. An VII. S. 209. *Schweikart.*

[? **Schötteringk**, M. W. von], Demonstratio theorematis parallelarum. Hamburg. 8°. 30 S. *Voit.*

1800.

***Wildt**, Johann Christian Daniel, Drei Beweise des elften Grundsatzes im ersten Buche von Euclids Elementen. Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 178. S. 1769—1772. Göttingen. 12°. *Schweikart.*

1801.

Gumaelius, S., Dissertatio sistens novam theoriam linearum parallelarum. Lund. *Klügel, Wörterbuch (1808), 3, 739.*

Hoffmann, Johann Joseph Ignaz, Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der Parallellinien, nebst Widerlegung des Hauffschen Versuchs. Offenbach a. M. 8°. 48 S. 1 Tfl. *Hoffmann, Critik.*

***Schwab**, Johann Christian, Tentamen novae parallelarum theoriae, notione situs fundatae. Stuttgart. 8°. XXX u. 25 S. 1 Tfl. *Müller.*

*[**Seyffer**, Karl Friedrich], Besprechung der Demonstratio theorematis parallelarum, Hamburg 1799. Göttingische gelehrte Anzeigen. 1801. 12°. S. 407—408.

1802.

***Krause**, Karl Christian Friedrich, Dissertatio philosophico-mathematica de philosophiae et matheseos notione et earum intima conjunctione. Jena. *Wahl.*

Langsdorf, Karl Christian, Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik. Erlangen. 8°. *Wahl.*

***Voit**, Paul Christian, Percursio conatuum demonstrandi theoriam parallelarum de iisque iudicium. Dissertation. Göttingen. 8°. *Hilf.*

1803.

***Carnot**, Lazare Nicolas Marguerite, Géométrie de Position. Paris. An XI. 4°. Art. 435.

Hauff, Johann Karl Friedrich, Lehrbegriff der reinen Mathematik. Teil I. Band 1. Frankfurt a. M. *Schweikart.*

***Ide**, Johann Joseph Anton, Anfangsgründe der reinen Mathematik. 2. Teil. Geometrie. Berlin. 8°.

- *[Kircher, Adolf], Nouvelle théorie des parallèles, avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles de A. M. Legendre. Paris. 8°. 64 S. 1 Tfl.

Hoffmann, Critik. Wiederholt irrthümlich als Abhandlung von Legendre angeführt, zum Beispiel bei Poggendorff 1, 1407.

- †Lacroix, Sylvestre François, Éléments de Géométrie à l'usage de l'école centrale des quatre nations. Paris. (*Paris 1830. 8°)

Hoffmann, Critik.

1804.

- Bolzano, Bernhard, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Prag. 8°. X u. 63 S.

Hoffmann.

- Jacques, Matthieu Joseph, Démonstration directe et simple des propriétés des parallèles rencontrées par une sécante. Paris. 8°.

Schweikart.

1805.

- *Lacroix, Sylvestre François, Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris. An XIV. 8°.

Riccardi.

1806.

- Geldern, Jacob van, Handleiding tot de beschouwende werkdadige Meetkunde. Amsterdam. 4°.

Hessing 1818, S. XI.

- *Grashof, Friedrich Carl August, Theses sphaerologicae quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem, omnique geometriae firmum jacent fundamentum. Berlin. 8°. 64 S. 1 Tfl. *Wahl.*

- *Simson, Robert, Die sechs ersten Bücher nebst dem elften und zwölften des Euclid mit Verbesserung der Fehler, wodurch Theon und andere sie entstellt haben, nebst den Anfangsgründen der ebenen und sphärischen Trigonometrie, mit erklärenden Anmerkungen von Robert Simson. Aus dem Englischen übersetzt von J. Mtthi. Reder. Herausgegeben von Joh. Niesert. Paderborn. 8°.

1807.

- Hauff, Johann Carl Friedrich, Euklids Elemente das erste bis zum sechsten, sammt dem elften und zwölften Buche, übersetzt von J. C. Hauff. Zweite Auflage. Marburg.

Wahl.

- *Hoffmann, Johann Joseph Ignaz, Kritik der Parallelen-theorie. Erster Teil. Jena. 8°. XII u. 276 S. 10 Tfl.

Erch.

- *Scheibel, Johann Ephraim, Vertheidigung der Theorie der Parallellinien nach Euklides. Breslau. 8°.

Müller.

- *Schweikart, Ferdinand Karl, Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig und Jena. 136 S. 5 Tfl.

Müller. Poggendorff 2, 876 hat 1808.

1808.

- ***Klügel**, Georg Simon, Artikel: Parallel. Mathematisches Wörterbuch. Dritter Teil. Leipzig. 8°. S. 727—739.
- ***Ouvrier**, Carl Siegmund, Theorie der Parallelen, als Ankündigung eines neuen Versuches über das Erkenntnisvermögen. Leipzig. 8°. 55 S. 1 Thl. *Erach.*
- ***Schwab**, Johann Christian, Essai sur la situation pour servir de supplément aux principes de la géométrie. Stuttgart. 50 S. *Riccardi.*

1809.

- Abreu**, Joao Manuel de, Supplément à la traduction de la géométrie d'Euclide de Peyrard, publiée en 1804, et la géométrie de Legendre, suivi d'un essai sur la vraie théorie des parallèles. Paris et Bordeaux. 8°. 76 S. 1 Thl. *Rogg. S. 298.*
- ***Thibaut**, Bernhard Friedrich, Grundriss der reinen Mathematik. 2. Aufl. Göttingen. 8°. (*3. Aufl. 1818. Die *erste Auflage 1801 enthält den Beweisversuch noch nicht.) *Wahl.*

1810.

- Geldern**, Jacob van, Beginselen der Meetkunst. Amsterdam. 8°. *Heusing 1818, S. XV.*
- Suzanne**, P. H., De la manière d'étudier les mathématiques. Paris. *Riccardi.*

1811.

- ***Brunacci**, Vincenzo, Elementi di algebra e geometria. Edizione riveduta ed illustrata con nuove correzione ed aggiunte fra le quali la teoria dell' interesse del denaro ed una nuova dimostrazione del teorema fondamentale delle parallele. Mailand. 8°. *Riccardi erwähnt eine Ausgabe von 1830.*
- ***Neubig**, Andreas, Vindiciae Euclidis. 2 Hefte. Erlangen. 8°.

1812.

- Bertrand**, Louis, Éléments de géométrie. Paris. *Schotten, 2. 266.*
- ***Gergonne**, Joseph Diez, Essai sur la théorie des parallèles. Annales de Gergonne. t. III. Nismes. 4°. S. 353—356. *Riccardi.*

1813.

- Duttenhofer**, Jacob Friedrich, Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den Parallellinien, vermittelt einer von jenen Theoremen unabhängigen Construction des Rechtecks. Stuttgart. 8°. 24 S. *Erach.*

- ***Herrmann**, Christian Alois, Versuch einer einfachen Begründung des eilften Euclidischen Axioms und einer darauf gebauten Theorie der Parallelen. Frankfurt a. M. 4^o. 28 S. 2 Tfl.

Sohnke. Riccardi führt diese Abhandlung unter Hoffmann irrthümlich noch einmal an.

1814.

- ***Peyrard**, François, Les œuvres d'Euclide, en grec, latin et français, Vol. I. Paris. 4^o.
- ***Schwab**, Johann Christian, Commentatio in primum elementorum Euclidis Librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Stuttgart. 8^o. 61 S. *Müller.*

1815.

- Guntz**, Elementare Theorie der parallelen Geraden. Beiträge zur reinen und technischen Mathematik. Heft 1. Grätz. *Müller.*
- Kjellin**, Carl Erik, Grunderna till geometrien. *Hilf. Poggendorf 1, 1965 hat 1814.*
- ***Metternich**, Matthias, Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst einem Anhang, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie gegeben wird. Mainz. 8^o. XIV u. 44 S. 1 Tfl. *Müller.*

1816.

- Bürger**, J. A. P., Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst Anmerkungen über andere bisher erschienene Parallel-Theorien. Karlsruhe. 8^o. XII u. 35 S. 1 Tfl. *Müller.*
- ***Crelle**, August Leopold, Über Parallelen-Theorien und das System der Geometrie. Berlin. 8^o. 116 S. 1 Tfl. *Müller.*
- ***[Gauß, Carl Friedrich]**, Besprechung von Schwab (1814) und Metternich (1815). Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1816. Stück 63. S. 617—622.
- ***Hoffmann**, Johann Joseph Ignaz, Bemerkung zu der Parallelen-theorie von L[üdicke]. Gilberts Annalen der Physik. Bd. 54. S. 134.
- ***Lüdicke**, August Friedrich, Über die Parallelentheorie. Gilberts Annalen der Physik, Bd. 52, S. 451—452.
- Vermehren**, Carl Christian Hermann, Versuch die Lehre von den parallelen und convergenten Linien aus einfachen Begriffen vollständig herzuleiten und gründlich zu erweisen. Güstrow. 8^o. 26 S. 1 Tfl. *Müller.*

1817.

- ***Lüdicke**, August Friedrich, Bemerkungen über die Vierecke mit gleichen gegenüberliegenden Seiten. Gilberts Annalen der Physik, Bd. 56. S. 198, 334 und 439.

***Ohm, Georg Simon**, Grundlinien zu einer zweckmässigen Behandlung der Geometrie. Erlangen. 8°. 91 S. 2 Tfl.

Wahl. Poggendorff 2, 317 hat 1818.

Wachter, Friedrich Ludwig, Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi. Danzig. 8°. 15 S. *Müller.*

1818.

Exley, Thomas, The theory of parallel lines perfected, or the twelfth axiom of Euclids Elements demonstrated. London. 8°. *Riccardi.*

Flauti, Vincenzo, Nuova dimonstrazione del postulato quinto in Euclide con aggiunte altre ricerche sullo stesso argomento fatte dal Proclo, da Nassir-Eddin, da Clavio e da Simson. Neapel. 4°.

Riccardi.

[Hellwag, Christoph Friedrich], Euklids eilfter Grundsatz als Lehrsatz bewiesen. Hamburg. 4°. 8 S. *Müller. Sohnke.*

***Hessling, C. W.**, Versuch einer Theorie der Parallelen. Halle a. S. 8°. 223 S. 5 Tfl. *Müller.*

Mayer, Johann Tobias, Wolfs Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik mit Veränderungen und Zusätzen von Mayer und Langsdorf und umgeändertem Text von Müller. 2. Ausgabe. Marburg. *Wahl.*

***Critische Revision** der im jüngst verflossenen Quinquennium erschienenen Schriften über Parallelen-Theorie. Heidelberger Jahrbücher der Literatur. Heidelberg. 1818. S. 689—703, 849—862.

Rogg. S. 308.

1819.

Hauff, Johann Karl Friedrich, Nova rectorum parallelarum theoria. Gandae. 4°. *Müller, Repertorium 2, 123.*

***König, Georg Ludwig**, Supplementa in Euclidem. Eutin. 4°. *Wahl.*

Lüdicke, August Friedrich, Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie. Meissen. 8°. 15 S. 1 Tfl. *Müller.*

Müller, Johann Wolfgang, Ausführliche evidente Theorie der Parallellinien. Nürnberg. 8°. 79 S. 1 Tfl. *Müller.*

***Ohm, Martin**, Kritische Beleuchtungen der Mathematik überhaupt und der euklidischen Geometrie insbesondere. Berlin. 8°. *Hill.*

***Sur l'emploi de l'algorithme des fonctions dans la démonstration des théorèmes en géométrie.** Annales de Gergonne. Nismes 4°. t. X. S. 161—184. *Riccardi.*

1820.

***Bürger, J. A. P.**, Vollständige Theorie der Parallellinien nebst Anwendungen über andere bisher erschienene Paralleltheorien. Zweite Ausgabe. Karlsruhe. 8°. 53 S. *Ersch. Sohnke.*

- †**Gerling**, Christian Ludwig, Johann Friedrich Lorenz' Grundriss der reinen und angewandten Mathematik, neu herausgegeben von Ch. L. Gerling. Helmstedt. 8°. 2 Teile. (*Ausgabe von 1851.)
- ***Hauber**, Carl Friedrich, Chrestomatia geometrica continens Euclidis elementorum principium graece usque ad libri primi propositionem XXVI et ad illud Graeca Procli Latina Savilii aliorumque scholia cum notitiis historicis. Nebst einem Anhang aus Prof. Pfeiderers Papieren. Tübingen. 8°.
- ***Lüdicke**, August Friedrich, Zur Theorie der Parallellinien. Gilberts Annalen der Physik, Bd. 64. S. 341. *Poggendorff 1, 1517.*
- Struve**, K. L., Theorie der Parallellinien. Königsberg. 8°. 36 S. *Müller.*

1821.

- ***Creizenach**, M., Abhandlung über den elften Euklidischen Grundsatz in Betreff der Parallellinien. Mainz. 4°. 28 S. *Ersch. Sohnke.*
- ***Hauff**, Johann Karl Friedrich, Nova rectarum parallelarum theoria, editio altera supplementis aucta. Frankfurt a. M. 4°. VIII u. 86 S. 1 Tfl. *Ersch. Sohnke.*
- Küster**, J. C., Versuch einer neuen Theorie der Parallelen. Mit einer Vorrede von Hofrath Bährens. Hamm. 8°. 38 S. 1 Tfl. *Müller, Repertorium 2, 124.*
- Mönnich**, B. F., Ein Versuch die Theorie der Parallellinien auf einen Grundbegriff der allgemeinen Grössenlehre zurückzuführen. Berlin. 8°. 56 S. 2 Tfl. *Ersch. Hill.*
- Sulla teoria delle parallele e su quella delle figure equivalenti. Gazzetta di Bologna 1821, No. 38. Bologna. *Riccardi.*

1822.

- ***Fries**, Jacob Friedrich, Die mathematische Natur-Philosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Heidelberg. 8°. *Wahl.*
- ***[Gauß, Carl Friedrich]**, Besprechung von C. R. Müller (1822). Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1822. Stück 73. S. 1725—1728.
- ***Lüdicke**, August Friedrich, Rein geometrische Theorie der Parallellinien. Gilberts Annalen der Physik. Bd. 72. S. 423. *Poggendorff 1, 1517.*
- ***Metternich**, Matthias, Vollständige Theorie der Parallellinien, oder geometrischer Beweis des elften Euklidischen Grundsatzes. Zweite umgearbeitete Auflage. Mainz. 8°. XX u. 41 S. *Hill.*
- ***Müller**, Carl Reinhard, Theorie der Parallelen. Marburg. 4°. IV u. 40 S. 1 Tfl. *Hill.*

1823.

- Huber**, Daniel, Nova theoria de parallelarum rectarum proprietatibus. Basel. 8°. 40 S. *Müller, Repertorium 3, 66.*

- * **Legendre**, Adrien Marie, *Éléments de géométrie*. XII. éd. Paris. 8°. *Hil.*
- * **Paucker**, Magnus Georg, *Die ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises oder die Elemente*. Königsberg. 8°. *Hil.*
- * **Wahl**, Friedrich Wilhelm Ludwig, *Dissertatio mathematica, symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Particula 1. Insunt IV theoriae earumque censura*. Jena. 4°. VIII u. 44 S. 1 Tfl. *Hil.*

1824.

- Bensemann**, Johann David, *Dissertatio de undecimo axioma elementorum Euclidis, pro facultate legendi*. Halle a. S. 8°. 50 S. 1 Tfl. *Sohnke.*
- * **Camerer**, Johann Wilhelm, *Euclidis elementorum libri sex priores, graece et latine, commentario e scriptis veterum ac recentiorum mathematicorum illustrati*. Vol. I. Berlin. 8°. *Riccardi.*
- * **Foex**, *Mémoire relatif à la théorie des parallèles. Rapport fait par MM. Ampère et Cauchy. Bulletin des Sciences mathématiques publié par Férussac*. Paris. 8°. t. I. S. 70. *Hil.*
- * **Jacobi**, Carl Friedrich Andreas, *De undecimo Euclidis axioma iudicium, cui accedunt pauca de trisectione anguli*. Jena. 8°. 54 S. 1 Tfl. *Hil.*
- * **Laplace**, Pierre Simon, *Exposition du système du monde*. 5. édition. Paris. 4°. Livre V, chap. 5. Note. *Delbœuf, Revue philosophique. t. 36. Paris 1893.*
- * **Stein**, Johann Peter Wilhelm, *Examen de quelques tentatives de théorie des parallèles. Annales de Gergonne*. Nismes. 4°. t. XV. S. 77—89. t. XVI. S. 45—64, S. 257—261. *Riccardi.*
- * *Essai de démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des parallèles. Annales de Gergonne*. Nismes. 4°. t. XIV. S. 269. *Riccardi.*

1825.

- Colburn**, W., *Nouvelle théorie des lignes parallèles*. Boston Journal of Philosophy and the Arts. Oct. 1825. S. 81, Juni 1826. S. 490. *Annales de Férussac, Année 1827. S. 162.*
- Hegenberg**, F. A., *Vollständige, auf die bekannten Elementarsätze von den geraden Linien und Winkeln gegründete Theorie der Parallellinien*. Berlin. 8°. 46 S. 1 Tfl. *Erach.*
- * **Servois**, *Lettre au rédacteur des Annales sur la théorie des parallèles. Annales de Gergonne, Nismes* 4°. t. XVI. S. 223—238. *Hil.*
- * **Taurinus**, Franz Adolph, *Theorie der Parallellinien*. Köln. 8°. 93 S. 3 Tfl. *Erach.*

1826.

- Hoffmann**, Johann Joseph Ignaz, Vermischte Aufsätze aus der Physik, Philosophie und Mathematik für Liebhaber dieser Wissenschaften: Über das Verhältniss des Parallelenproblems zur Elementargeometrie. Frankfurt a. M. 8°. *Hil.*
- Minarelli**, C., Dimostrazione del quinto postulato d'Euclide. Bologna. 8°. 20 S. 1 Tfl. *Annales de Férussac, Année 1827. S. 162.*
- Müller**, Johann Wolfgang, Neue Beiträge zu der Parallelen-theorie, den Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes und den Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke. Augsburg und Leipzig. 8°. 71 S. *Hoffmann.*
- ***Olivier**, Louis, Über den eilften Grundsatz in Euklids Elementen der Geometrie. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin. 4°. Bd. 1. S. 151. *Hil.*
- ***Taurinus**, Franz Adolph, Geometriae prima elementa. Köln 1826. 8°. 76 S. 2 Tfl. (Universitätsbibliothek in Bonn.)

1827.

- ***Knar**, Joseph, Über die Theorie der Parallellinien. Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettinghausen. Wien. Bd. 3. S. 404—439. *Hil.*
- Koch**, Christian Adolf, Über Parallellinien. Ein Versuch, dem Urtheil Sachkundiger gewidmet. Hamburg. 8°. 12 S. *Hil.*
- ***Moebius**, August Ferdinand, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Geometrie. Leipzig. (*Gesammelte Werke. Bd. I. Leipzig 1890. 8°. S. 176.)
- Neubig**, Andreas, Die Parallelen-theorie. Programm. Bayreuth. 4°. *Sohnke, Bibliotheca S. 177.*

1828.

- ***Knar**, Joseph, Berichtigung seiner Ansicht von den Parallellinien. Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettinghausen. Wien. Bd. 4. S. 427—438.
- Lampredi**, Urbano, Intorno ad un passo di Euclide sulla teoria delle parallele. Giornale arcadico di Roma. t. 40. Rom. *Riccardi.*
- Scorza**, Giuseppe, Euclide vendicato. Neapel. *Riccardi.*
- Terquem**, Olry, Manuel de Géométrie. Paris. 8°. Note I. *Beltrami, Atti del Lincei, 1889.*

1829.

- †**Lobatschewskij**, Nikolaj Iwanowitsch, O natschalach geometrii (Über die Anfangsgründe der Geometrie). Kasaner Bote 1829 und 1830. (*Gesammelte geometrische Werke Bd. 1. S. 1—67.)

- ***Reinhold**, H. J., Theorie des Krummzapfens nebst einem Anhang: Versuch einer rein geometrischen Begründung der Lehre von den Parallellinien. Münster. 8°. *Sohnke.*

1830.

- Hill**, Carl Johan, Euclidis Elementorum prop. XXXII libri I. explicata. Lund. 4°. *Riccardi, Saggio.*

1831.

- Falck**, Henrik, Practisk Lærobok i Geometrien och Trigonometrien med strängt bevis i läran om parallela linier. Upsala. *Hill.*
- ***Lehmann**, Jacob Wilhelm Heinrich, Anfangsgründe der höheren Mechanik, nach der antiken rein geometrischen Methode bearbeitet. Berlin. 8°. *Hill hat 1839.*

1832.

- ***Bolyai**, Johann, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. 8°. 28 S. Anhang zu: Wolfgang Bolyai, Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos... introducendi. T. 1. Maros Vásárhely.
- Doppler**, Christian, Beiträge zur Parallelen-theorie. Jahrbücher des K. K. polytechnischen Instituts in Wien, herausgegeben von J. C. Prechel. Band XVII. Wien. *Bürger 1833.*
- ***Steiner**, Jacob, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin. 8°. (*Gesammelte Werke, Bd. 1. Berlin 1886. 8°. S. 240.)

1833.

- Bürger**, J. A. P., Vollständig erwiesene, von den ältesten Zeiten bis jetzt noch unberichtigt gewesene Theorie der Parallellinien, nebst einer Critik mehrerer bisher erschienenener Paralleltheorien und Anführung anderer neuerfundener geometrischer Gegenstände. Heidelberg. 8°. XII u. 208 S. 2 Tfl. *Sohnke.*
- Ekstrand**, Johan, Lærobok i Geometriens Elementer. Teil 1. Jönköping. *Hill.*
- ***Legendre**, Adrien Marie, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. t. XII. S. 367—410. *Riccardi.*

Thompson, Thomas Perronet, Geometry without axioms, or the first books of Euclid's elements with alterations and notes; and an intercalary book, in which the straight line and plane are derived from properties of the sphere, with an appendix containing notices of methods proposed for getting over the difficulty in the 12th axiom of Euclid. London. 8°. *Riccardi.*

Wiessner, Gottfried, Beweis über Parallellinien oder dass alle drei Winkel eines jeden Dreieckes zusammen genommen zwei rechten Winkeln gleich sind. 2. Auflage. 8°. 1 Tfl. *Sohnke, Bibliotheca S. 197.*

1834.

***Bürger, J. A. P.**, Neu aufgefundenener Beweis von dem seit 21 hundert Jahren unberichtigt gewesenem eilften Euklidischen Grundsatz in der Geometrie in Betreff der Parallelentheorie. Heidelberg. 8°. 16 S. 1 Tfl. *Sohnke. Riccardi nennt als Verfasser irrtümlich: Dessen (?).*

***Metzing, S.**, Beweis des eilften Euklidischen Grundsatzes. Berlin. 8°. 43 S. 1 Tfl. *Sohnke.*

***Swinden, Jan Hendrik van**, Elemente der Geometrie, übersetzt von C. F. A. Jacobi. Jena. 8°.

1835.

Bürger, J. A. P., Rettung meiner Ehre. Vertheidigungsschrift. Heidelberg. 8°. *Sohnke, Bibliotheca S. 142.*

*[**Crelle, August Leopold**], Théorie des parallèles. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin. 4°. Band 11. S. 198. *Sohnke.*

***Hill, Carl Johan**, Conatus theoriæ parallelarum stabiliendi præcipui, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit Auctor. Pars 1. [P. 2. 1843. P. 3—5. 1844]. Lund. 4°. Im Ganzen: 72 S. 2 Tfl.

†**Lobatschefskij, N. I.**, Woobraschajemaja geometrija (Imaginäre Geometrie). Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1835. (*Gesammelte geometrische Werke Bd. 1, S. 71—120.)

†**Lobatschefskij, N. J.**, Nowyja natschala geometrii s polnoj teoriijej parallelnych (Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen). Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1835—1838. (*Gesammelte geometrische Werke, Bd. 1, S. 249—486.)

1836.

Gaudain, Lettre à M. van Tenac sur la théorie des parallèles. Annales maritimes et coloniales. Nov. 1836. *Sohnke.*

Hennig, Karl August, Neue Begründung der Parallelentheorie. Nürnberg. 4°. 16 S. 2 Tfl. *Sohnke.*

Kaiser, Ignaz, Versuch die Theorie der parallelen Linien streng nachzuweisen. Wien. 8°. 32 S. 2 Tfl. *Sohnke.*

Lampredi, Urbano, Tentativo di una nuova teorica elementare delle linee perpendicolare, oblique e parallele. Seconda edizione. Neapel. 32 S. 1 Tfl. *Sohnke, Bibliotheca S. 168.*

Lemonnier, Nouvelle théorie des parallèles. Annales maritimes et coloniales. Juli 1836. *Sohnke.*

† **Lobatschefskij**, N. I., Primjenjenije woobrashajemoj geometrii k njekotorych integralach (Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale). Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1836. (*Gesammelte geometrische Werke Bd. 1, S. 121—218.)

Thomson, Thomas Perronet, Géométrie sans axiomes, ou le premier livre des Éléments d'Euclide démontré d'une manière complètement rigoureux. 5. édit., traduit de l'anglais par van Tenac. Paris. 8°. *Sohnke, Bibliotheca S. 192.*

Van Tenac, Nouvelle théorie des parallèles. Annales maritimes et coloniales. Mai 1836. *Sohnke.*

1837.

Gräf, Carl, Der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks ohne Hilfe der Parallellinien bewiesen. Ein Beitrag zur Gründung des elften Grundsatzes des Euclides und die darauf ruhende Theorie der Parallellinien. Rudolstadt. 8°. 16 S. 1 Tfl. *Sohnke, Bibliotheca S. 151.*

Horn, Das Parallelenproblem. Programm. Glückstadt. *Schotten 2, 226.*

* **Lobatschefskij**, Nikolaj Iwanowitsch, Géométrie imaginaire. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin. 4°. Bd. 17. S. 295. (*Gesammelte geometrische Werke, Bd. 2, S. 581.)

Wiessner, Gottfried, Begründung der Parallelentheorie, auf den ohne Beihilfe der Parallellinien geführten Beweis, dass die Winkelsumme eines jeden Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich sei. Jena. 8°. 13 S. 1 Tfl. *Sohnke.*

Alphabetisches Verzeichnis der im Litteraturverzeichnis vorkommenden Autoren.

Hinter jedem Autor ist zunächst, soweit sie sich ermitteln liefs, die Lebenszeit angeführt. Die darauf folgenden *cursiv* gedruckten Zahlen bedeuten die Jahre des Erscheinens der einzelnen Schriften.

- Abreu, Joao Manuel de (1754—1815) 1809.
 Alembert, Jean le Rond d' (1717—1783) 1759, 1789.
 [Anders] 1796.
 [Arnauld, Antoine] (1612—1694) 1667.
 Austin, William (1754—1793) 1781.
 Barozzi, Francesco (* 1538) 1560.
 Behn, Daniel 1761 siehe Hagen.
 Belli, Silvio († 1575) um 1570.
 Bendauid, Lazarus (1762—1832) 1786.
 Bensemann, Johann David (Gymnasiallehrer in Cöslin) 1824.
 Bertrand, Louis (1731—1812) 1778, 1812.
 Bezout, Étienne (1730—1783) 1770.
 Binder, Benjamin Gottlob 1751 siehe Hanke.
 Boehm, Andreas (1720—1790) 1771.
 Bolyai, Johann (1802—1860) 1832.
 Bolzano, Bernhard (1781—1848) 1804.
 Bonnycastle, John (1750?—1821) 1789.
 Borelli, Giovanni Alfonso (1608—1679) 1658.
 Boscovich, Ruggiero Giuseppe (1711—1787) 1752.
 Bossut, Charles (1730—1814) 1775.
 Brunacci, Vincenzio (1768—1818) 1811.
 Bürger, J. A. P. 1816, 1820, 1833, 1834, 1835.
 Büsch, Johann Georg (1728—1800) 1775.
 Cagnazzi, Lucca 1790.
 Camerer, Johann Wilhelm (1763—1847) 1824.
 Camus, Charles Étienne Louis (1699—1768) 1750.
 Carnot, Lazare Nicolaus Marguerite (1753—1823) 1803.
 Castillon (Castiglione), Giovan (1708—1791) 1792.
 Cataldi, Pietro Antonio († 1626) 1603, 1603, 1604.
 Clairaut, Alexis Claude (1713—1765) 1741.
 Clavius, Christoph (1537—1612) 1574.
 Colburn, W. 1825.
 Creizenach, M. 1821.
 Crelle, August Leopold (1780—1855) 1816, 1835.
 Desargues, Girard (1593—1662) 1639.
 Doppler, Christian (1803—1853) 1832.
 Dutenhofer, Jacob Friedrich 1813.
 Ebert, Johann Jacob (1737—1805) 1792.
 Eichler, Caspar 1786.
 Ekstrand, Johan (1787—1862) 1833.
 Euklid (um 300 v. Chr.) 1462.
 Exley, Thomas 1818.
 Falck, Henrik (1791—1866) 1831.
 Felkel, Anton (* 1740) 1781.
 Flauti, Vincenzo 1818.
 Foex 1824.
 Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768—1830) 1795.
 Franceschini, Francesco Maria (1756—1840) 1787.
 Fries, Jacob Friedrich (1773—1843) 1822.
 Gaudain 1836.
 [Gauß, Carl Friedrich] (1777—1855) 1816, 1822.
 Geldern, Jacob van (1785—1848), 1806, 1810.
 Gensichen, J. F. 1786.
 Gergonne, Joseph Diez (* 1771) 1812.
 Gerling, Christian Ludwig (1788—1864) 1820.
 Gestrin, Martin (1594—1648) 1637.
 Gilbert, Ludwig Wilhelm (1769—1824) 1798.

- Giordano da Bitonto, Vitale (1683—1711) 1680, 1686.
 Gräff, Carl 1837.
 Grasshof, Friedrich Carl August 1806.
 Guarini, Guarino (1624—1688) 1671.
 Guldin, Paul (1677—1648) 1641.
 Gumaelius, Samuel (1776—1849) 1801.
 Guntz 1815.

 Hagen, Johann Jacob von 1761.
 Hanke, F. G. 1751.
 Hauber, Carl Friedrich (1775—1851) 1820.
 Hauff, Johann Karl Friedrich (1766—1846) 1793, 1799, 1803, 1807, 1819, 1821.
 Hausen, Christian August (1693—1743) 1734.
 Hauser, Matthias 1780.
 Hegenberg, F. A. 1825.
 [Hellwag, Christoph Friedrich] (1754—1835) 1818.
 Hennig, Karl August 1836.
 Herrmann, Christian Alois 1813.
 Hessling, C. W. 1818.
 Hill, Carl Johan Danielsson (1793—1875) 1830, 1835.
 Hindenburg, Karl Friedrich (1741—1808) 1781, 1786, 1799.
 Hobbes, Thomas (1588—1679) 1655, 1656.
 Hoffmann, Johann Joseph Ignaz (1777—1866) 1801, 1807, 1816, 1826.
 Hofmann 1786.
 Horn 1837.
 Huber, Daniel (1768—1829) 1823.

 Ide, Johann Joseph Anton (1775—1806) 1803.

 Jacobi, Carl Friedrich Andreas (1795—1855) 1824, 1834 siehe Swinden.
 Jacques, Matthieu Joseph (1736—1821) 1804.

 Kaestner, Abraham Gotthelf (1719—1800) 1758, 1763 siehe Klügel, 1790, 1796.
 Kaiser, Ignaz 1836.
 Karsten, Wenceslaus Johann Gustav (1732—1787) 1758, 1760, 1778, 1786.
 Kepler, Johann (1571—1630) 1604.
 Kesaer, Franz Xaver von (1740—1804) 1778.
 [Kircher, Adolf] 1803.
 Kjellin, Carl Erik (1776—1844) 1815.
 Klügel, Georg Simon (1739—1812) 1763, 1808.
 Knar, Joseph 1827, 1828.
 Koch, Christian Adolph 1827.
 Koenig, C. G. 1758.

 Koenig, Georg Ludwig (1766—1849) 1819.
 Kraft, Georg Wolfgang (1701—1754) 1752, 1753.
 Krause, Karl Christian Friedrich (1781—1832) 1802.
 Küster, J. C. 1821.

 La Chapelle, de (1710—1792) 1746.
 Lacroix, Sylvestre François (1765—1848) 1803, 1805.
 Lambert, Johann Heinrich (1728—1777) 1786 (1766)
 Lampredi, Urbano (1761—1838) 1828, 1836.
 Langsdorf, Karl Christian (1757—1834) 1797, 1802, 1818 siehe Mayer.
 Laplace, Pierre Simon (1749—1827) 1824.
 Legendre, Adrien Marie (1752—1833) 1794, 1823, 1833.
 Lehmann, Jacob Wilhelm Heinrich (*1800) 1831.
 Lemonnier 1836.
 Lindquist, Johann Henrik (1743—1798) 1789.
 Lobatschewskij, Nikolaj Iwanowitsch (1793—1856) 1829, 1835, 1836, 1837.
 Lorenz, Johann Friedrich (1738—1807) 1791.
 Lüdicke, August Friedrich (1748—1822) 1816, 1817, 1819, 1820, 1822.
 Luino, Francesco (1740—1792) 1772.

 Malézieu, Nicolaus de (1650—1727) 1715.
 Mayer, Johann Tobias (1752—1830) 1797 siehe Langsdorf, 1818.
 Metternich, Matthias (1758—1825) 1815, 1822.
 Metzinger, S. 1834.
 Minarelli, C. 1826.
 Moebius, August Ferdinand (1790—1868) 1827.
 Mönnich, B. F. 1821.
 Montucla, Jean Étienne (1725—1799) 1758, 1799.
 Müller, Carl Reinhard (*1774) 1822
 Müller, Johann Wolfgang (*1765) 1819, 1826.

 Nasir-Eddin (1201—1274) 1594, 1693 (1651).
 Neubig, Andreas (*1780) 1811, 1827.
 Niesert, J. 1806 siehe Simson.

 Ohm, Martin (1792—1872) 1819.
 Ohm, Georg Simon (1787—1854) 1817.
 Oliver of Bury, Thomas 1604.
 Olivier, Louis 1826.
 Ouvrier, Carl Sigmund 1808.

- Pagnini, Joseph Maria** 1783, 1794.
Pardies, Ignace Gaston (1636—1673) 1671.
Patricio, Francesco (1529—1597) 1587.
Paucker, Magnus Georg (1787—1855) 1823.
Peletier, Jacques (1517—1582) 1557.
Peyrard, François (1760—1822) 1814.
Playfair, John (1748—1819) 1797.
Proklos (410—485) 1533, 1560 siehe Barozzi.

Ramus, Petrus (1515—1572) 1569.
Reder, J. M. 1806 siehe Simson.
Rehbein, J. H. E. 1795.
Reinhold, H. J. 1829.
Rosenback 1789 siehe Lindquist.

Saccheri, Girolamo (1667—1733) 1733.
[Saladini, Girolamo] (1731—1813) 1795.
Sauveur, Joseph (1653—1716) 1753.
Savile, Henry (1549—1622) 1621.
Scheibel, Johann Ephraim (1736—1809) 1807.
Scherffer, Karl (1716—1783) 1770.
Schmidt, Georg Gottlieb (1768—1837) 1797.
Schötteringk, M.W. von 1790, 1799.
Schübler, Christian Ludwig (1754—1820) 1788.
Schultz, Johann (1739—1805) 1780, 1784, 1786.
Schwab, Johann Christian 1801, 1808, 1814.
Schweikart, Ferdinand Karl (1780—1859) 1807.
Scorza, Giuseppe (1781—1844) 1828.
Segner, Johann Andreas (1704—1777) 1739, 1747.
Servois 1825.
[Seyffer, Karl Friedrich] (1762—1822) 1801.
Simpson, Thomas (1710—1761) 1747.

Simson, Robert (1687—1768) 1756, 1775, 1806.
Stein, Johann Peter Wilhelm (1795—1881) 1824.
Steiner, Jacob (1796—1863) 1832.
Strömer, Mårten (1707—1770) 1744.
Struve, K. L. 1820.
Suzanne, P. H. 1810.
Swinden, Jan Hendrik van (1746—1823) 1790, 1834.

Tacquet, Andrea (1612—1660) 1654.
Taurinus, Franz Adolph (1794—1874) 1825, 1826.
Terquem, Olry (1782—1862) 1828.
Thibaut, Bernhard Friedrich (1775—1832) 1809.
Thompson, Thomas Perronet (1783—1869) 1833, 1836.

Valerio, Luca (1552?—1618) um 1613.
Van Tenac 1836.
Varignon, Pierre (1654—1722) 1731.
Venturi, Giambattista (1746—1822) 1784.
Vermehren, Carl Christian Hermann 1816.
Voigt, Johann Heinrich (1751—1823) 1789, 1791.
Voit, Paul Christian 1802.

Wachter, Friedrich Ludwig 1817.
Wahl, Friedrich Wilhelm Ludwig (1795—1831) 1823.
Wallis, John (1616—1703) 1693 (1663), 1693.
Wiessner, Gottfried 1833, 1837.
Wildt, Johann Christian Daniel (1770—1844) 1795, 1800.
Wolff, Christian (1679—1754) 1710, 1715, 1797 siehe Langsdorf, 1818 siehe Mayer.

Verfasser unbekannt oder zweifelhaft: 1799, 1818, 1819, 1821, 1824.

Nachträge und Berichtigungen.

Euklid.

- S. 4, Z. 9 v. o. sind hinter: „Er machte selbst einen Versuch,“ die Worte einzuschalten: „dessen Mangelhaftigkeit schon Saccheri (Seite 75—76 dieses Buches) dargethan hat. Noch weiter von Euklid entfernte sich Ptolemaeus“.
- S. 5 ist am Ende der Litteratur hinzuzufügen:
- Tannery, P., *La géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons.* Paris 1887.

Wallis.

- S. 17, Z. 6 v. u. muss es heißen „Kaestner“ statt „Kästner“.
- S. 18, Z. 14 v. o. ist die Anmerkung hinzuzufügen:
- „Dafs Ramus auf die Bedeutung des Euklidkommentars von Proklos aufmerksam macht, während er Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie verwirft, könnte als ein Widerspruch erscheinen. In Wahrheit ist beides die Folge seines Bestrebens, die Fesseln der Überlieferung zu brechen. Ramus konnte für seinen Grundsatz: *Nulla auctoritas rationis, sed ratio auctoritatis regina dominaque esse debet* (Scholae mathematicae lib. III) sich sehr gut auf Proklos berufen: hatte doch hier schon einer der Alten Euklid zu tadeln gewagt, dessen Autorität zu Ramus' Zeiten als unantastbar galt. Auf der andern Seite schien aber bei der unmittelbaren Gewissheit, die der anschaulichen geometrischen Erkenntnis zukommt, die ratio, der gesunde Menschenverstand, zu verlangen, dafs man seine Zeit nicht an so selbstverständliche Dinge verschwende.“
- S. 18, Z. 17 v. u. ist einzuschalten:
- „Neuerdings hat Hagen (*Synopsis der höheren Mathematik*, Bd. II. Berlin 1894. S. 7) darauf hingewiesen, dafs diese Erklärung der Parallelen bereits 1604 von Kepler benutzt worden ist (*Opera omnia*, ed. Frisch, Vol. II. S. 185—188), freilich, wie wir hinzufügen möchten, nur gelegentlich, während es sich bei Desargues um eine grundlegende Auffassung handelt. Sie findet sich auch, wie schon R. Baltzer in seinen *Elementen* (1. Aufl., Bd. 2. S. 13) bemerkt hat, bei Newton, und zwar am Schlusse des Scholium zum Lemma XVIII in der Sectio V des ersten Buches der *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687).
- S. 19. Bei der Litteratur ist einzuschalten:
- Barrow, J., *Lectiones habitae in scholis publicis Academiae Cantabrigiensis Anno 1664.* London 1683. S. 67.

Carnot, Géométrie de position. Paris An XI (1803). Art. 435.

Günther, S., Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin 1887.

Waddington, Pierre de la Ramée. Paris 1856.

Saccheri.

S. 35, Z. 14 v. o. Das Komma muß nach „procul“ stehen, nicht nach „Tempore“.

S. 37, Z. 14 v. u. ist die Anmerkung hinzuzufügen:

„Dafs Saccheri von der unbedingten Richtigkeit der euklidischen Geometrie überzeugt war, zeigt besonders der *Appendix* seines Werkes (S. 139 bis 142), wo er zu beweisen versucht, dafs das Verhältnis von Figuren in der Ebene, also — fügen wir hinzu — auch der Inhalt einer solchen Figur, sich nur dann ermitteln lasse, wenn vorher das Parallelenaxiom begründet sei.“

Wir führen noch einige Stellen aus dem *Appendix* an:

(139) „Hier möge noch die Bemerkung Platz finden, dafs man durch die Analysis nicht ermitteln kann, in welchem Verhältnisse eine beliebig gegebene Figur, selbst wenn sie geradlinig ist, zu irgend einer andern gegebenen geradlinigen Figur steht, so lange man nicht voraussetzt, dafs jenes Euklidische Axiom, von dem die Lehre von den Parallelen abhängt, schon begründet worden ist.

„Beweis. Ich schicke voraus, dafs die Analysis und die gewöhnliche Arithmetik alle Regeln der Addition, Subtraktion, [Multiplikation,] Division und Wurzelausziehung gemeinsam haben, sobald man nämlich die niedrigste Art des Seienden begründet hat und sich dann ganz auf diese Art beschränkt. Will man jedoch von einer Art zu einer andern übergehen, zum Beispiel (durch Multiplikation, das heifst durch Verknüpfung*) irgend einer geraden Linie mit einer andern geraden Linie) von der blofsen Länge zu der ebenen Fläche, darauf in ähnlicher Weise von dieser (indem man sie wiederum mit einer geraden Linie multipliziert) zu einem Körperraume von drei Abmessungen und, indem man so aufsteigt, durch neue Multiplikationen zu den denkbaren höheren Stufen von noch mehr Abmessungen**), wobei Entsprechendes für die Division gilt, vermittelt deren man zu den niedrigeren Stufen herabsteigt — dann bin ich fest überzeugt, dafs die Analysis keinen Grundsatz liefern kann, auf den sich die Rechnungen stützen lassen, die sie vorschreibt, damit man das richtige Ergebnis erhält.“

Saccheri denkt sich zuerst in den Endpunkten einer Grundlinie von der Länge 1, darauf in den Endpunkten einer Grundlinie von der Länge 2 jedesmal Lote von der Länge 1 errichtet und die Endpunkte durch Gerade verbunden, und bemerkt, man könne nur dann zeigen, dafs sich diese Figuren wie ihre Grundlinien verhalten, wenn jene Verbindungsgeraden mit dem Orte der Punkte gleicher Entfernung von den Grundlinien zusammenfallen. Wir teilen hier nur noch den Schlufs seiner Auseinandersetzungen mit:

„Darum halte ich schliesslich dafür, dafs man immer die Geometrie zu

*) [Im Original steht: „per multiplicationem seu ductum.“]

**) [Im Original heifst es: „ad altiores conceptibiles gradus plurium dimensionum.“]

Hilfe nehmen muß, die ja, sobald jenes Euklidische Axiom begründet ist, die Beschaffenheit solcher [Verbindungs-]Linien feststellt.“

S. 38, Z. 11–14 v. o. muß lauten:

„und der Grenzgeraden, das heißt der Geraden, die zwischen den schneidenden und den nicht schneidenden die Grenze bilden, in aller Strenge nachgewiesen. Er hat auch schon den Ort der Punkte betrachtet, die von einer Geraden gleichweit entfernt sind.“ Die Worte: „und ist . . . gelangt“ sind zu tilgen.

S. 40. Bei der Litteratur ist einzuschalten:

Cordara, Giulio Cesare, Vita del padre Tomaso Ceva in den: Vite degli Arcadi illustri, t. V. Rom 1751. S. 142–143.

Halsted, George Bruce. Die Übersetzung des Euclides ab omni naevo vindicatus ist inzwischen in dem Jahrgange 1895 des American Mathematical Monthly S. 10, 42–43, 67–69, 103–109, 144–146 bis Lehrsatz XVIII (im Urtext bis S. 26) fortgeschritten.

S. 53, Z. 1 v. u. fehlt hinter „anwenden“ die eckige Klammer.

S. 109, Z. 1 v. u. fehlt hinter „S. 98“ der Punkt.

S. 117, Z. 1, 2 v. u. Weitere Nachforschungen, bei denen wir uns der gütigen Unterstützung des Herrn Hofrat Förstemann in Leipzig zu erfreuen hatten, haben Folgendes ergeben. In dem Werke: Micraelius, J., Lexicon Philosophicum. Jena 1653 heißt es S. 608:

„Ly est terminus scholasticorum, quo denotatur acceptio vocis materialis: ut Ly Mus est monosyllabum, Nos dicimus τὸ Mus est monosyllabum.“

Die Entstehung dieser Bezeichnung ist damit freilich noch nicht erklärt.

Lambert.

S. 147, Z. 13 v. u. statt „sieben“ lies „acht“.

S. 148, Z. 6 v. o. ist hinzuzufügen:

„und auch C. F. Camerer, den wir dort ebenfalls erwähnten, hat dieselbe Bemerkung gemacht.“

S. 148, Z. 16 v. o. ist hinzuzufügen:

„Jedoch hat F. A. Taurinus in seinen Geometriae prima elementa (Köln 1826), ohne Lamberts Theorie der Parallellinien zu kennen, bemerkenswerte Untersuchungen angestellt, in denen Lamberts Vermutung in betreff der imaginären Kugel ihre Bestätigung findet.“

S. 151. Bei der Litteratur ist einzuschalten:

Camerer, C. F., Euclidis elementa graece et latine, commentariis instructa, ed. Camerer et Hauber. Bd. 1. Berlin 1824. S. 425–426.

S. 188, 189 Anm. Der Beweis für das immer stumpfer werden der Winkel läßt sich im Lambertschen Stile folgendermaßen führen:

In Fig. XIX (S. 189) seien in E, B, D und J rechte Winkel, zu beweisen ist, daß $JPD > JNB$. Man mache $EG = EB$ und ziehe durch G die Senkrechte GL , dann ist $JLG = JNB$ und $LG = NB$ (§. 52). Halbiert man GD in A , richtet AM senkrecht auf und legt die Figur längs AM zu-

sammen, so fällt L in p über P , da $GL = BN > DP$ ist (§. 57), demnach wird $MPD > MpD$ und also auch $JPD > JNB$.

Auf eine ähnliche Art wird in §. 69 verfahren.

Gauß.

S. 213, Z. 15 v. o. ist die Anmerkung hinzuzufügen:

Nach einer Angabe Beltramis erzählt Terquem (Manuel de Géométrie, Paris 1828), daß ihm Legendre diesen Satz bereits im Jahre 1808 brieflich mitgeteilt habe.

S. 217, Z. 1 v. u. statt „letzten“ lies: „nächsten“.

S. 222, Z. 8 v. u. statt „anderen“ lies: „ändern“.

S. 231, Z. 3 v. u. statt „Arnaud“ lies „Arnauld“.

Verzeichnis

der im Texte erwähnten oder besprochenen Autoren*).

Die *cursive* gedruckten Seitenzahlen beziehen sich auf die Litteraturangaben am Schlusse der Einleitungen zu den hier mitgetheilten Schriften und auf die Nachträge.

- d'Alembert, J., nennt die Parallelen-
theorie das Ärgernis der Elementar-
geometrie 211, 218.
- Anding, E., über Lambert 151.
- Apollonius benutzt Euklid als Grund-
lage 45.
- Archimedes benutzt Euklid als Grund-
lage 45.
- Arnauld, A., verwendet *Winkelräume*
zum Beweise der fünften Forderung 231.
- Backer, Augustin und Alois de, über
Saccheri 40.
- Baltzer, R. erwähnt eine noch nicht
veröffentlichte Abhandlung von Gauß
über die Erklärung der Ebene 226,
macht auf Bolyai und Lobatschewskij
aufmerksam 239, 253; erwähnt New-
tons Erklärung paralleler Geraden
317.
- Barozzi, F. übersetzt Proklos 17.
- Barrow, J., Bezeichnung in den Figuren
65, bekämpft Ramus 317.
- Bartels, J. M. C., mit Gauß befreun-
det, Lehrer von Lobatschewskij 242,
253.
- Battaglini G. übersetzt J. Bolyai 239,
253.
- Beez, R., imaginäre Kugel 151.
- Beltrami, E., Saccheri precursore di
Lobatschewskij III, 39, 40.
- Bernoulli, Daniel, Briefwechsel mit
Lambert verloren gegangen 150.
- Bernoulli, Johann I., Bezeichnung in
den Figuren 65.
- Bernoulli, Johann III., giebt Lam-
berts Theorie der Parallellinien heraus
141, kauft Lamberts Nachlaß 148,
Subskription auf Lamberts hinter-
lassene Schriften 149, begründet mit
C. F. Hindenburg das *Magazin für
die reine und angewandte Mathematik*,
IV, 149.
- Bernoulli, Paul, einziger Enkel von
Johann III: 150.
- Bertrand, L., verwendet *Winkelräume*
zum Beweise der fünften Forderung
231, 240.
- Bessel, F. W., erwähnt Lambert 148,
227, Gauß und B., Briefe 1829 und
1830: 226—227.
- Bilfinger, B. G., verbessert Chr. Wolff
156.
- Biot, J. B., Unterhaltungen mit La-
grange 211.
- Bolyai, Johann, Schöpfer der nicht-
euklidischen Geometrie III, 215, 218,
B. und Saccheri 37, *Leben und
Schriften* 241—243, B. und Taurinus
246, 252.
- Bolyai, Wolfgang, Axiom 143, 260;
imaginäre Kugel 146, 151; 215, 217,
Brief von Gauß an B. 219, *Leben
und Schriften* 241—243.
- Borelli, J. A., neue Erklärung der
Parallelen 33, Einfluß auf Saccheri
38, von Saccheri geprüft 76—82.
- Bunjakowskij, Kritik Legendres 218.
- Caesar, Caius Julius, Saccheri mit Cae-
sar verglichen 40.
- Camerer, J. W., erwähnt Saccheri 39,
40, erwähnt Saccheri und Lambert
248, 319.
- Cantor, M., über Euklid 5, über Wal-
lis und Nasir Eddin 29, über G. Ceva

*) Die im Litteraturverzeichnis, S. 293—313, angeführten Autoren sind hier nicht aufgenommen, da von ihnen bereits S. 314—316 ein alphabetisches Verzeichnis gegeben worden ist.

- und J. A. Borelli 40, über Kaestner 151.
- Carnot, L., ersetzt das *Parallelenaxiom* durch das Princip der *Ähnlichkeit* 19, 318.
- Castillon, G., über Euklid, Proklos und Nasir-Eddin 19.
- Cataldi, P. A., Erste Schrift über die Parallelen-theorie als solche 18.
- Ceva, Giovanni, Verkehr mit Saccheri 34, Vorläufer von Moebius 36.
- Ceva, Tommaso, Verkehr mit Saccheri 34, 319, besingt Saccheri 35, 40, regt Saccheris *Neostatica* an 36.
- Cicero, Marcus Tullius, von Lambert erwähnt 142, 158.
- Clairaut, A., gründet die Elementargeometrie auf das *Rechteck* 18, 19; Euklid und die Sophisten 153.
- Clavius, Chr., Euklid-Kommentar 17, 19, 45, 139; merkwürdige Figur 17 f.; widerlegt Proklos 75 f.; sein Axiom 78, von Saccheri geprüft 81–82.
- Cordara, G. C., über Saccheri 319.
- Coste, Prediger in Leipzig, widerlegt Hausen 139.
- Crelle, A. L., über die Erklärung der Ebene 227.
- Deahna, über die Erklärung der *Ebene* 226.
- Delbœuf, J., über das Princip der *Ähnlichkeit* 19, 19.
- Desargues, G., neue Erklärung der *Parallelen* 18, 20, 317.
- Eckwehr, J. W. von, Lehrer von J. Bolyai 241.
- Engel, F., übersetzt Wassiljefs Rede vom 22. Oct. 1893: 254.
- Erb, über die Erklärung der *Ebene* 227.
- Erdmann, B., über die Axiome der Geometrie 218.
- Erhardt, S., über Lambert 151.
- Euklid, IV, *Einleitung und Litteratur* 3–5, erstes Buch der Elemente 6–14, von Wallis verteidigt 21–23, 29, 30, von Saccheri verteidigt 45–47, 77 f., 84; Lambert über Euklids Verfahren 141–142, Lambert über Euklids Absichten 152–162.
- Euler, L., VI.
- Ferrari, G., über Saccheri 40.
- Förstemann unterstützt unsre Nachforschungen über die Bedeutung von „Ly“ (S. 117) 319.
- Foncenex, Daviet de, hyperbolische Trigonometrie 147, 151; Parallelogramm der Kräfte 212, 218.
- Formey, J. H. S., 3 Briefe Lamberts an F. 150, Rede auf Lambert 151.
- Forti, A., überläßt uns eine Abschrift der Aufzeichnungen Gamaranas VI, 34; übersetzt Fr. Schmidts Notice sur W. et J. Bolyai 254.
- Fourier, J., neue Erklärungen der *Geraden* und der *Ebene* 211, 218.
- Franceschini, Fr., versucht die fünfte Forderung zu beweisen 214.
- Friedlein, E., giebt Proklos heraus 5.
- Frischauf, J., bearbeitet die nichteuklidische Geometrie J. Bolyais 239, 253.
- Fürer, A., Stiefbruder von Taurinus, überläßt uns zwei Briefe von Schweikart und einen von Gauß an Taurinus, macht uns auf die *Elementa* des Taurinus aufmerksam VI f., 244, 251 f.
- Galilei, G., von T. Ceva und Saccheri angegriffen 36.
- Gamarana, Fr., Aufzeichnungen über Saccheri VI, 34–36.
- Gauß, C. F., III, 146, *Einleitung und Litteratur* 211–218, seine bis jetzt gedruckten Äußerungen über die Parallelen-theorie 219–236; F. Kleins Vermutungen über das Verhältnis von Lobatschewskij und Bolyai zu G.: 242–243; Brief an Gerling über Schweikart (1819) 246, Brief an Taurinus (1824) 249–250, G. und Schweikart 252; 281.
- Genocchi, A., über Foncenex 218.
- Gergonne, J. D., über Legendres analytischen Beweis für den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks 20.
- Gerling, Ch. L., über die Erklärung der *Ebene* 227, Brief von G. an W. Bolyai über Schweikart (1851) 243–244, Brief von Gauß an G. über Schweikart (1819) 246.
- Giordano da Bitonto, V., merkwürdige Figur 18, verlangt, daß man das Vorhandensein Äquidistanter Geraden beweise 33–34, 38, 40; seine Figur auch bei Saccheri 77.
- Graf, M., über Lambert 151.
- Grafsmann, H., VII.
- Grunert, J., über Gauß, Lobatschewskij und Bolyai 253.
- Guldin, P., Neue Formulierung des Axioms von Clavius 33, 40.
- Günther, S., über Riccati, Foncenex und Lambert 151, über Foncenex und Lagrange 218, über Seyffer 218; Euklid im Mittelalter 318.
- Hagen, J., erwähnt Keplers Erklärung paralleler Geraden 317.
- Halsted, B. G., beginnt Juni 1894 eine

- Übersetzung von Saccheri zu veröffentlichten 39, 40, 319; über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie 218; übersetzt Lobatschefskij und Bolyai 239, 253.
- Hankel, H., über Euklids Elemente 5; über das Princip der Ähnlichkeit 20.
- Hansen, der Astronom, 231.
- Hauber, C. F., Stücke aus Euklid, Proklos, Savile u. s. w. 5; vgl. Camerer.
- Hauff, J. K. F., Lehrer von Schweikart 243.
- Hausen, Ch., versucht die fünfte Forderung zu beweisen 139.
- Heiberg, J. L., neue Euklidausgabe 4, 5; 154.
- Heilbronner, J. Chr., erwähnt Saccheri 39.
- Helmholtz, H., Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen: III.
- Hessling, C. W., über Pfaffs Ansicht in betreff des Parallelenaxioms 215, 218.
- Hindenburg, C. F., IV, über Lamberts Theorie der Parallellinien 143—144, 147, giebt mit J. Bernoulli das *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, allein das *Archiv für reine und angewandte Mathematik* heraus 149; 151.
- Holland, G. J. von, Brief von Lambert an H. 141.
- L'Hospital über Saccheri als Geometer 36.
- Hoüel, J., Mitteilung über Lagrange 211, 218, Anmerkung über das Fehlen der Untersuchungen von Gauß über nichteuklidische Geometrie in den Werken 230, übersetzt Lobatschefskij, Bolyai und Briefe von Gauß und Schumacher 239, 253.
- Huber, D., über Lambert 151.
- Jacobi, C. F. A., erwähnt Saccheri 39, 40, und Lambert 148, 151.
- Justi, K. W., über Schweikart 253.
- Kaestner, A. G., über Clavius' *Euklid-kommentar* 17, sein Interesse für die Parallelen-theorie 139, regt Klügels Dissertation an 140, spätere Resignation 141, 214.
- Kant, J., Bedeutung für die Parallelen-theorie VI, über Lambert 143, Brief Lamberts an K. über das *Imaginäre* 146, Brief Lamberts an K. über Wolffs Nominaldefinitionen 157, Schwab bekämpft K.s Ansichten über die Gewissheit der Geometrie 221
- Kepler, J., Erklärung paralleler Geraden 317.
- Klein, F., über das Verhältniß von Lobatschefskij und Bolyai zu Gauß 242, 253.
- Klängel, G. S., über ältere Versuche in der Parallelen-theorie 20, zeigt den Fehler bei Giordano da Bitonto 34, bespricht Saccheri 39, 40, 140, seine *Dissertation* 140—141, Brief Lamberts an K. 143, Dissertation von Lambert gelobt 155, sein Skepticismus findet Nachfolge 214.
- Lagrange, J. L., versucht die fünfte Forderung zu beweisen 211—212, beeinflusst seinen Freund Foncenex 212.
- Lambert, César, Schrift über *Parallelen-theorie* (1859) 148.
- Lambert, Johann Heinrich, IV—VI, setzt *euklidfeste* Leser voraus 4, über das Princip der *Ähnlichkeit* 19, 85, 199 ff.; zeigt, daß man das Axiom der Stetigkeit vermeiden kann 56, 144, 187 f., 193, 319; *Einleitung und Litteratur* 139—151, Lebenslauf 141, Theorie der Parallellinien 1766 verfaßt 141—143, über Euklids Verfahren 141—142, Unzulänglichkeit des L.schen Beweises 143—144, Verhältniß zu Saccheri 144—145, Geometrie auf der *Kugel* 145, 202, *imaginäre Kugel* 145—147, 203, 259, 151; seine Parallelen-theorie später fast ganz vergessen 147—148, Schicksale von Lamberts *Nachlaß* 148—150, *Theorie der Parallellinien* 152—208; 211, L. über Klängel 155, über Chr. Wolff 155—159, über Proklos 159; L. und Legendre 212—213; 215; von Bessel erwähnt 148, 227, 243; von Camerer erwähnt 248; 252, 259.
- Laplace, P. S., Princip der Ähnlichkeit 19, 20; 212, 218.
- Lefort, P. A. F., Mitteilung an Hoüel über Lagrange 211.
- Legendre, A. M., analytischer Beweis für den Satz von der Winkelsumme 19, 20; 218; Verhältniß zu Saccheri 37—38, zu Wallis, Saccheri und Lambert 212, Bedeutung für die Geschichte der Parallelen-theorie 213; Satz über die Summe der Dreieckswinkel schon 1808 gefunden 320.
- Leibniz, G. W., Indicesbezeichnung 65, Geometrie der Lage von Kaestner erwähnt 140, Untersuchungen über *Parallelen-theorie* aus dem *Nachlaß* 139, 151.
- Lepsius, J., über Lambert 151.
- Lie, Sophus, IV.
- Lindemann, F., über das erste Buch von Euklids Elementen 5.

- Lobatschewskij, N., Schöpfer der *nichteuklidischen Geometrie*, III, L. und Saccheri 37–39, Lambert und L. 146; 151; seine Untersuchungen über die Parallellinien von Gauß gelobt 216, 235; *Leben und Schriften* 240–241, 253; L. und Gauß 242, L. und Taurinus 246, 252, 282.
- Lombardi, A., über Saccheri 40.
- Lorenz, J. F., Axiom 213; Grundrifs 244; Euklidübersetzung 247.
- Loria, G., über Euklids Elemente und über P. Ramus 20.
- Lübsen, H. B., versucht das Parallelenaxiom zu beweisen 236.
- Maier, L., über Proklos 5, erwähnt Saccheri 39, 40.
- Manganotti, A., will Saccheris Schriften neu herauszugeben 39.
- Mansion, P., über Saccheri 40, über Fourier 218.
- Metternich, M., sein Beweisversuch von Gauß besprochen 221–223.
- Micraelius, J., Bedeutung von „Ly“ 319.
- Moebius, A. F., über das Princip der Ähnlichkeit 20, G. Ceva sein Vorläufer 36.
- Montucla, J., erwähnt Saccheri 39.
- Morgan, A. de, über Lagranges Beweisversuch 212, 218.
- Müller, C. R., sein Beweisversuch von Gauß besprochen 223–226.
- Nasir Eddin (Nassaradin), arabische Bearbeitung von Euklids Elementen 17, sein Beweisversuch von Saccheri besprochen 82–83.
- Newton, J., über Anziehung proportional der Entfernung 36, Erklärung paralleler Geraden 317.
- Nicomedes, Conchoide 75.
- Oliver of Bury, Th., zweite Schrift über die Parallelentheorie als solche 18.
- Pascal, Bl., Bezeichnung in den Figuren 65.
- Peters, C. A. F., giebt den Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher heraus 217.
- Peyrard, F., entdeckt die älteste der bekannten Euklidhandschriften 17, 20.
- Pfaff, J. F., Skepticismus 215, 244.
- Poggendorff, J. C., über Schweikart 253.
- Proklos, Euklidkommentar 4, 5, sein Beweisversuch 4, 317, übersetzt von Barozzi, gewürdigt durch Ramus 17, sein Beweisversuch besprochen von Saccheri 75–76, von Lambert erwähnt 159.
- Ptolemaeus versucht die fünfte Forderung zu beweisen 214, 317.
- Ramus, P., würdigt Proklos 17, verwirft jedoch Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie 18, 20, 317.
- Riccardi, P., Euklibibliographie 5, über Saccheri 40.
- Riccati, V., hyperbolische Trigonometrie 147, 151.
- Riemann, B., *Probevorlesung* III, Geometrie auf der Kugel schon bei Lambert 145 und bei Taurinus 252; 151.
- Saccheri, G., sein *Euclides ab omni naevo vindicatus* von Beltrami entdeckt III, 39, 40; setzt euklidfeste Leser voraus 4, prüft den Beweisversuch von Wallis 17, 19, 83–85; *Einleitung und Litteratur* 33–40; Leben und Charakter 34 f., seine Schriften 35–37, Inhalt und Bedeutung des *Euclides ab omni naevo vindicatus* 37–39, Bibliotheken, die dieses Werk besitzen, 38, ältere Autoren, die S. erwähnen, 39; S. und Legendre 37–38, 212, 213, S., Lobatschewskij und Bolyai 37–39; Bemerkungen aus dem Appendix 318, deutsche Übersetzung des ersten Buches des *Euclides vindicatus* (1733) 41–136, prüft den Beweisversuch des Proklos 75–76, den des Borelli 76–78, des Clavius 78–82, des Nasir Eddin 17, 82–83; S. und Lambert 144–145; 215, 243, 248.
- Sartorius von Waltershausen, W., teilt Äußerungen von Gauß über die *Antieuklidische Geometrie* mit 216, 218, berichtet über Bartels 242.
- Savile, H., sein Interesse für Euklids Elemente 18, 20; spricht von den Makeln bei Euklid 36.
- Schlüssel siehe Clavius.
- Schmid, Anton, über Saccheri als Schachspieler 40.
- Schmidt, Franz, Mitteilungen über die beiden Bolyai VII, 240–242, Mitteilung eines Briefes von Gerling an W. Bolyai über Schweikart 243–244, schreibt über das Leben der beiden Bolyai 253, 254.
- Schulz, J., verwendet Winkelräume zum Beweise der fünften Forderung 231, 240.
- Schumacher, Gauß und S., Briefe von 1831 und 1846, 227–235.

- Schwab, J. Ch., sein *Tentamen* (1801) von Seyffer besprochen 214, seine *Commentatio* (1814) von Gauß besprochen 220—221.
- Schweikart, F. K., IV, von Bessel erwähnt 148, 227; erzählt von Kaestners Resignation 151; seine *Astralgeometrie* von Gauß erwähnt 235, *Leben und Schriften* 243, Bibliotheken, in denen S.s Parallelen theorie vorhanden ist 243, Gerling über S. 244, Brief an seinen Neffen Taurinus (1824) 245—246; Gauß an Gerling über Schweikart 246; regt Taurinus an 246, 247 ff., 261, Brief an Taurinus (1820) 248—249; inwiefern mit Gauß gleichberechtigt 252.
- Scriba, H. E., über Schweikart und Taurinus 254.
- Seyffer, K. F., bespricht die anonyme *Demonstratio theor. par.* (1799) und das *Tentamen novae theor. par.* (1801) von Schwab 214—215.
- Simpson, R., Beweisversuch von Seyffer erwähnt 214.
- Simson, Th., Beweisversuch von Seyffer erwähnt 214.
- Sohnke, L. A., giebt Bemerkungen über die Geschichte der Parallellinien bis 1837: 20.
- Steiner, J., seine Erklärung paralleler Geraden 18.
- Steinschneider, M., Euklid bei den Arabern 20.
- Sulzer, J. G., ordnet Lamberts Nachlafs 148.
- Tannery, P., über Euklids Elemente 5, 317.
- Taurinus, F. A., IV, Brief von Schweikart an T. (1824) 245—246, *Leben und Schriften* 246—252, Bibliotheken, in denen diese Schriften vorhanden sind, 251, aus dem Vorwort zu den *Elementa* 247 f., Brief von Schweikart an T. (1820) 248—249, Brief von Gauß an T. (1824) 249 f.; seine Bedeutung für die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie 252, 319; Stücke aus der *Theorie der Parallellinien* (1825) 255—266; Stücke aus den *Geometriae prima elementa* 267—286.
- Terquem, O., über Legendre 320.
- Thales von Milet beweist, daß jeder Durchmesser seinen Kreis halbiert 120.
- Theodosius benutzt Euklid als Grundlage 45.
- Thiermann erwähnt Saccheri 39, 40.
- Trançon, A., erwähnt Arnaulds Beweisversuch 231.
- Ventimiglia, R., stellt 1692 sechs geometrische Aufgaben, die Saccheri 1693 löst 35 f.
- Verci, G., über Saccheri 40.
- Veronese, G., über Saccheri 40.
- Voit, P. Ch., angeregt durch Seyffer, Dissertation, Skepticismus 215.
- Waddington, über Ramus, 318.
- Wallis, J., IV, *Einleitung und Littérature* 17—20, deutsche Übersetzung der *Demonstratio postulati quinti* (1663) 21—30, sein Beweisversuch von Saccheri besprochen 83—85, Kaestners Verfahren dem von W. ähnlich 140; Legendres Beweis von 1794 beruht auch auf dem Princip der Ähnlichkeit 212.
- Wassiljef, A., Mitteilungen über Lobatschefskij VII, 240; Rede auf Lobatschefskij vom 22. Okt. 1893: 254.
- Winter, über Schweikart 254.
- Wolf, R., forscht nach Lamberts Nachlafs 150; über Lambert 151.
- Wolff, Chr., von Lambert angegriffen 155—159.
- Zeller, E., über Bilfinger 156.

5142

Er. Wohlgebohren

gefalliges Schreiben vom 30 Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatze habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien zur keine Spur von wahrem geometrischen Geiste anzutreffen.

Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als das er unvollständig ist. Zwar läßt Ihre Darstellung des Beweises, daß die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks nicht grösser als 180° sein kann in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein dies würde sich ergänzen lassen, und es bedarf keinen Zweifel daß jene Unmöglichkeit sich auf das allentzogenste beweisen läßt. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2^{ten} Theil, daß die Summe der Winkel nicht kleiner als 180° sein kann, dies ist der eigentliche Knoten, die Klippe woran alles scheitert. Ich vermuthe, daß Sie sich noch nicht lange mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es aber 30 Jahr, und ich glaube nicht, daß jemand sich eben mit diesem 2^{ten} Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, gleich ich niemals etwas darüber bekannt gemacht habe. Die Annahme, daß die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180° , führt auf eine ganz von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus unsequant ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so daß ich jede Aufgabe in derselben auflösen

kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich
a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante
annimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geo-
metrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusam-
menfallen. Die Satze dieser Geometrie scheinen nun Theil
paradox, und dem Augenblicke ungerichtet; bei genauerer ruhiger
Überlegung findet abman aber, dass sie an sich durchaus nicht
unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel
eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man
nur die Seiten gross genug nehmen darf, dennoch kann der
Flächeninhalt eines Dreiecks, wie gross auch die Seiten genommen
werden, nie eine bestimmte Gränze überschreiten, ja sie nicht
einmal erreichen. Alle meine Bemühungen einen Widerspruch
eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu
finden sind fruchtlos gewesen, und das Einzige was unserem
Verstande noch widersteht, ist dass es, wie sie wohl, in Raum
eine an sich bestimmte (obwohl unbestimmte) Grösse geben
müsste. Aber wir denken, wir wissen, trotz der Nicht-Sagenden
Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar
nichts über das wahre Wesen des Raumes, als dass wir etwas
aus Unmöglichkeit vorkommendes formal mit Absicht Unmöglich
verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie
die wahre, und jene Constante in einigen Verhältnissen zu solchen
Grössen die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am
Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich
bedenke wohl wohl im Inneren der Worte geängstigt, dass die
Euklidische Geometrie nicht die wahre wäre, weil wir dann

ein absolutes Maass *a priori* haben würden.

Von einem Manne der sich ^{als} einen denkenden Mathe-
matischen Kopf gereizt hat, fürchte ich nicht, dass er
das Vorstehende missverstehen werde: auf jedem Fall aber
haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen,
von der auf keine Weise ein offenkundiges oder zur Oeffentlichkeit
funktionsfähiger Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde
ich, wenn ich einmahl mehr Muße gewinne, als in meinen
gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Ueberse-
hungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Göttingen den 8. November
1824.

Ihr Wohlgeborener

ergebener Diener

O. Gauss.

kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich
a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante
annimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geo-
metrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusam-
menfallen. Die Sätze dieser Geometrie scheinen zum Theil
paradox, und dem Ueigebten ungewohnt; bei genauerer ruhiger
Überlegung findet abman aber, dass sie an sich durchaus nicht
unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel
eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man
nur die Seiten gross genug nehmen darf, demnach kann der
Flächeninhalt eines Dreiecks, wie gross auch die Seiten genommen
werden, nie eine bestimmte Gränze überschreiten, ja sie nicht
einmal erreichen. Alle meine Bemerkungen einen Widerspruch
und Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu
finden sind fruchtlos gewesen, und das Einzige was unserem
Verstande darin widerspricht, ist dass es, wäre sie wahr, in Raum
eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Längengrösse geben
müsste. Aber wir denken, wir wissen, trotz des Nicht-Sagenden
Wort Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar
nichts über das wahre Wesen des Raumes, als dass wir etwas
uns unantastlich vorkommendes factum mit Absolut Unmöglich
verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie
die wahre, und jene Constante in einigen Verhältnissen zu solchen
Grössen die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am
Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich
bedenke daher wohl zuwille in Furcht der Wuth geängstigt, dass die
Euklidische Geometrie nicht die wahre wäre, weil wir dann

ein absolutes Maass a priori haben würden.

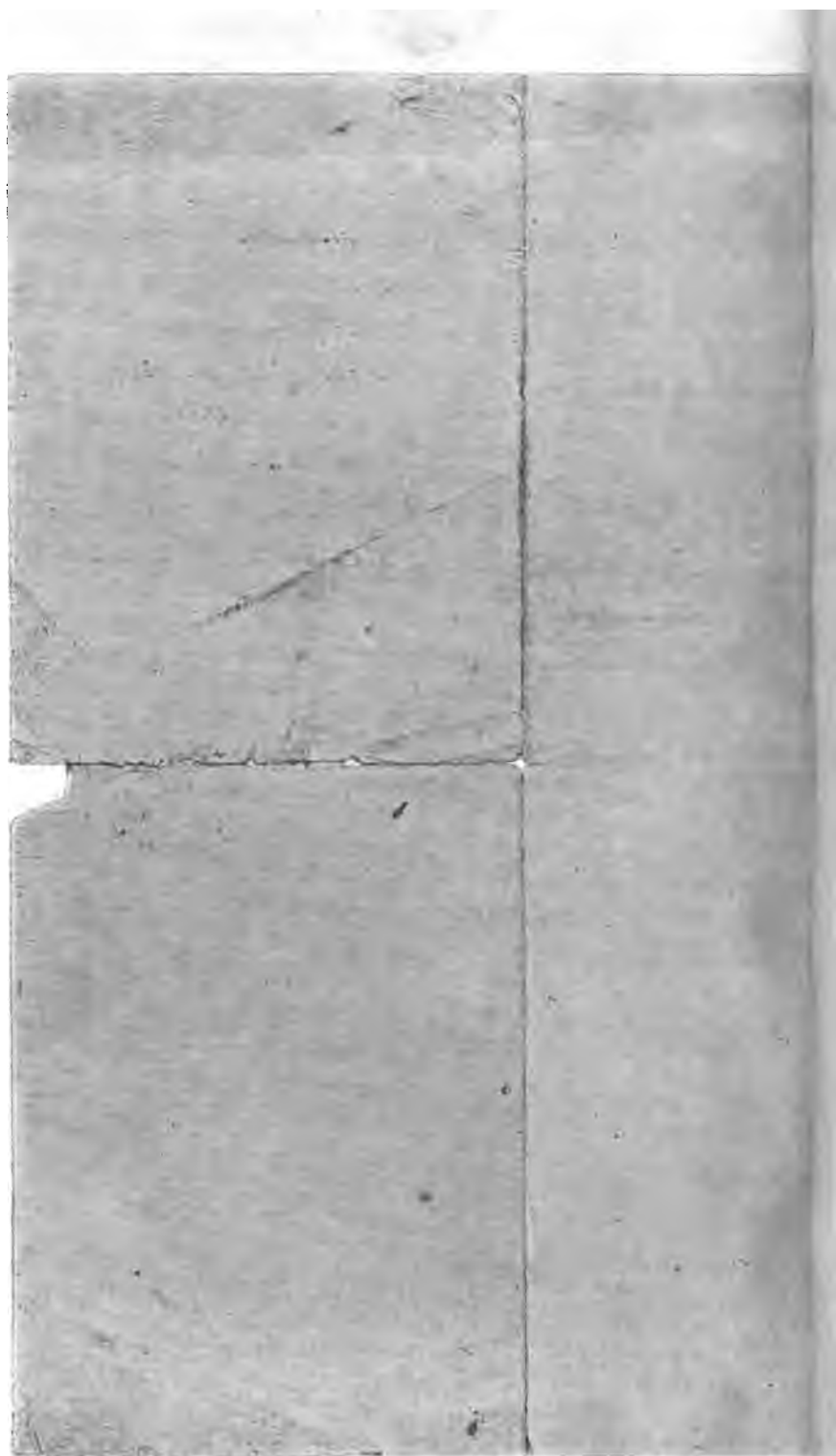
Von einem Manne der sich ^{als} einen denkenden Mathematiker Kopf gereizt hat, fürchte ich nicht, dass er das Vorstehende missverstehen werde; auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein offenkundiges oder zur Oeffentlichkeit fähiges Gebrauchen zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmal mehr Ruhe gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Uebersetzungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Ihr Wohlgeborener

Göttingen den 8. November
1824.

ergebener Diener
O. Gauss.





3 2044 020 103 925

THE BORROWER WILL BE CHARGED
AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT
RETURNED TO THE LIBRARY ON OR
BEFORE THE LAST DATE STAMPED
BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE
NOTICES DOES NOT EXEMPT THE
BORROWER FROM OVERDUE FEES.

WIDENER
BOOK DUE
FEB 8 1982
726 2819

WIDENER
BOOK DUE
MAY 1 1993

WIDENER
BOOK DUE
JUL 5
1396764
CANCELLED
DEC 1 8 1984

WIDENER
FEB 12 1996
CANCELLED

